<u>Zusammenfassung: kanonische Transformationen</u> V26 – 12.07.07

Definition: Variablentransformation d. Form (2) heisst "kanonisch", wenn sie d. Form der kanonischen Bewegungsgleichungen erhält, d.h., wenn ein $\tilde{H}(Q,P,t)$ existiert, für das gilt:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad \longrightarrow \quad \dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} \qquad (1)$$

Allgemeines Konstruktionsprinzip einer kanonischen Transformation: wähle "erzeugende F" und konstruiere neue Hamilton-Funktion gemäß:

$$\sum_k p_k \dot{q}_k - H(q_k, p_k, t) = \sum_k P_k \dot{Q}_k - \tilde{H}(Q_k, P_k, t) + \frac{d}{dt} F(q, p, Q, P, t) \qquad (2)$$

Bemerkung: Da nur zwei der vier Variablensätze q, p, Q, P unabhängig sind, gibt es vier verschiedene Klassen von "Erzeugenden" F. (Je nach Problemstellung ist eine nützlicher als die anderen.)

$$F = F_1(q, Q, t) \qquad (3)$$

$$F = F_2(q, P, t) - \sum_k Q_k P_k \qquad (4)$$

$$F = F_3(p, Q, t) + \sum_k q_k p_k \qquad (5)$$

$$F = F_4(p, P, t) + \sum_k q_k p_k - \sum_k Q_k P_k \qquad (6)$$

Beispiel: F1 $\quad F_1 = F_1(q,Q,t):$

$$\sum_k \underset{①}{p_k \dot{q}_k} - \underset{③}{H(q,p,t)} \overset{(33.2)}{=} \sum_k \underset{②}{P_k \dot{Q}_k} - \underset{③}{\tilde{H}(Q,P,t)} + \overbrace{\sum_k \left[\underset{①}{\frac{\partial F_1}{\partial q_k} \dot{q}_k} + \underset{②}{\frac{\partial F_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k} \right] + \underset{③}{\frac{\partial F}{\partial t}}}^{\frac{d}{dt} F_1(q,Q,t)} \qquad (1)$$

(1) ist identisch erfüllt, falls:

$$p_k(q,Q,t) \overset{①}{=} \frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q_k} \qquad (2)$$

$$P_k(q,Q,t) \overset{②}{=} -\frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q_k} \qquad (3)$$

(7), (8) auflösen nach: $\begin{cases} q = q(Q,P,t) & (4a) \\ p = p(Q,P,t) & (4b) \end{cases}$

$$\tilde{H}(Q,P,t) \overset{③}{=} \left[H(q,p,t) + \frac{\partial F}{\partial t}(q,Q,t) \right]_{\overset{(9a)}{q = q(Q,P,t)},\ \overset{(9b)}{p = p(Q,P,t)}} \qquad (5)$$

Grundidee hinter dieser Konstruktion:

Wenn F1 von q,Q,t abhängt, brauchen wir Gleichungen, für p und P [siehe (2) und (3)].

Diese bekommen wir, durch Vergleich der Koeffizienten von $\dot{q}$ und $\dot{Q}$ in (3).

Analog für F2(q,P,t), F3(p,Q,t), F4(p,P,t).

H35

Analog für andere Tr.-Klassen: (33.2), mit Einsteinscher Summenkonvention:

$$\underbrace{-p_k\dot q_k + P_k\dot Q_k + \frac{dF}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t}}_{=0 \qquad (1a)} = \underbrace{\tilde H(Q,P,t) - H(q,p,t) - \frac{\partial F}{\partial t}}_{=0 \qquad (1b)}$$

gilt für alle Klassen von F

Erzeugende F	(1a) $=0$	Gleichungen benötigt für	Koeff.-Vergleich
$F=F_1(q,Q,t)$	$-p_k\dot q_k + P_k\dot Q_k + \frac{\partial F_1}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial F_1}{\partial Q_k}\dot Q_k$	$p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}$ (2a), $P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}$ (2b)	$\dot q_k, \dot Q_k$
$F=F_2(q,P,t) - Q_kP_k$	$-p_k\dot q_k + \cancel{P_k\dot Q_k} + \frac{\partial F_2}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial F_2}{\partial P}\dot P_k - \cancel{\dot Q_k P_k} - Q_k\dot P_k$	$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k}$ (3a), $Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P}$ (3b)	$\dot q_k, \dot P_k$
$F=F_3(p,Q,t) + q_kp_k$	$-\cancel{p_k\dot q_k} + P_k\dot Q_k + \frac{\partial F_3}{\partial p_k}\dot p_k + \frac{\partial F_3}{\partial Q_k}\dot Q_k + \cancel{\dot q_k p_k} + q_k\dot p_k$	$q_k = -\frac{\partial F_3}{\partial p_k}$ (4a), $P_k = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_k}$ (4b)	$\dot p_k, \dot Q_k$
$F=F_4(p,P,t) + q_kp_k - Q_kP_k$	$-\cancel{p_k\dot q_k} + \cancel{P_k\dot Q_k} + \frac{\partial F_4}{\partial p_k}\dot p_k + \frac{\partial F_4}{\partial P_k}\dot P_k + \cancel{\dot q_k p_k} + q_k\dot p_k - \cancel{\dot Q_k P_k} - Q_k\dot P_k$	$q_k = -\frac{\partial F_4}{\partial p_k}$ (5a), $Q_k = \frac{\partial F_4}{\partial P_k}$ (5b)	$\dot p_k, \dot P_k$

H36

Bemerkung: Die Definitionen F2, F3 und F4 können als Legendre-Transformationen von F1 aufgefasst werden, und umgekehrt.

Beispiel in Klasse F2:
Betrachte erzeugende der Form:

$$F_2(q,P,t) = \sum_{j=1}^{f} f_j(q,t)\,P_j \tag{1}$$

(35.3a)
$$P_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial f_j}{\partial q_k} P_j \tag{2}$$

(35.3b)
$$Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = f_k(q,t) \tag{3}$$

(3) umfasst alle bekannte Koordinatentransformationen der Lagrangeschen Mechanik (sogenannte Punkttransformationen)

Spezielle Wahl von f:

$f_j = q_j$

$$F_2(q,P,t) \overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{f} q_j P_j \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} P_k &\overset{(2)}{=} P_k \\ Q_k &\overset{(3)}{=} q_k \end{aligned}\right\} \text{'identische Transformation'} \tag{5}$$

Satz: Eine gegebene Transformation

$$Q = Q(q,p,t) \quad , \quad P = P(q,p,t) \qquad (1)$$

ist genau dann kanonisch, wenn folgende Poisson-Klammer-Relationen erfüllt sind,

$$\{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij} \qquad (2)$$

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0 \qquad (3)$$

wobei die Poisson-Klammern bezüglich q,p zu berechnen sind:

$$\{A, B\}_{q,p} = \sum_k \left[\frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q_k}\right] \qquad (4)$$

Beweis: Übungsaufgabe

Bemerkung: dieser Satz hat wichtige Anwendungen in der Quantenmechanik, wegen

$$\{\ ,\ \} \to \frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ]$$

Hamilton-Jacobi-Theorie

Bewegungsgleichungen werden einfacher, wenn die neuen Koordinaten zyklisch sind. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn eine zeitabhängige kanonische Transformation existiert,

$$\{q, p, H(q,p,t)\} \longrightarrow \{Q, P, \tilde{H}(Q,P,t) = H(q,p) + \frac{\partial F}{\partial t} \overset{!}{=} 0\} \qquad (1)$$

Forderung

so dass die neue Hamilton-Funktion verschwindet:

Falls $\tilde{H}(Q,P,t) = 0$, folgt $\dot{Q}_k \overset{(HG)}{=} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} = 0$, $\dot{P}_k \overset{(HG)}{=} -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} = 0$ (2)

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$Q_k(q,p,t) = \beta_k = \text{const.} \quad , \quad P_k(q,p,t) = \alpha_k = \text{const.} \qquad (3)$$

Invertieren von (3) liefert gesuchte Lösung der Bewegungsgl.:

$$q_k = q_k(Q,P,t) = q_k(\beta,\alpha,t) \quad , \quad p_k = p_k(Q,P,t) = p_k(\beta,\alpha,t) \qquad (4)$$

α_k, β_k spielen die Rolle von Intergrationskonstanten, lassen sich durch Angabe v, Anfangsbedingungen bestimmen:

$$\text{const} = \beta_k \overset{(2)}{=} Q(q_0, p_0, t_0) \quad , \quad \text{const.} = \alpha_k \overset{(2)}{=} P_k(q_0, p_0, t_0) \qquad (5)$$

Satz: (1) Die Lösung der kanonischen Bewegungsgl. ist äquivalent dazu, eine allgemeine Lösung $\tilde S = \tilde S(q,\alpha,t)$ der partiellen Differentialgleichung (DGL) ("Hamilton-Jacobi-Gleichung")

$$\boxed{H\left(q_1,\dots,q_f,\ p_1=\frac{\partial \tilde S}{\partial q_1},\ \dots,\ p_f=\frac{\partial\tilde S}{\partial q_f},\ t\right)+\frac{\partial \tilde S}{\partial t}=0} \qquad (1)$$

zu finden, mit f unabhängigen "Integrationskonstanten" $\alpha_1,\dots,\alpha_f$ (alle zeitunabhängig)

(2) Insbesondere gilt dann: $P_k=\alpha_k=\text{const.}\ ,\quad Q_k = \frac{\partial \tilde S(q,\alpha,t)}{\partial\alpha_k}=\beta_k=\text{const.}$ (2)

und durch Auflösen nach q folgt: $q_k = q_k(\beta,\alpha,t)$ (3)

Beweis (1): Eine solche Lösung sei gegeben; betrachte sie als Erzeugende vom Typ F2:

$$F_2(q,P,t) := \tilde S(q,P,t) \qquad (4)$$

Die neue Hamilton-Funktion ist dann

$$\tilde H(Q,P,t) \overset{(35.1b)}{=} H(q,p,t)\Big|_{p_k \overset{(35.3a)}{=} \frac{\partial\tilde S}{\partial q_k}} + \frac{\partial \tilde S}{\partial t} \overset{(1)✓}{=} 0 \qquad (5)$$

□

Beweis (2): folgt trivial, analog zu (38.3-5), mit $Q_k \overset{(35.3b)}{=} \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = \frac{\partial\tilde S(q,\alpha,t)}{\partial\alpha_k} = (2)✓$ (6)

II.

Bemerkung: Da in der Hamilton-Jacobi-Theorie [Gl. (39.1,2)] nur Ableitungen der Erzeugenden vorkommen, ist sie nur bis auf eine Additive Konstante bestimmt. Per Konvention wird diese so gewählt, dass

$$\tilde S(q_0,\alpha,t_0) = 0 \qquad (0)$$

Satz: Wenn die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, (eine der α_k sei E) vereinfacht die Wahl

$$\boxed{\tilde S(q,\alpha,t) = -E(t-\overset{0}{t_0}) + W(q,\alpha_1=E,\dots,\alpha_f)} \qquad (1)$$

"verkürzte Wirkung"

für die Erzeugende die Hamilton-Jacobi-Gl. zu

"verkürzte Hamilton-Jacobi-Gl."

$$\boxed{H\left(q_1,\dots,q_f,\ \frac{\partial W}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial W}{\partial q_f}\right) = E} \qquad (2)$$

Beweis:

laut Annahme

$$\underbrace{H\left(q_1,\dots,q_f,\ p_1=\underbrace{\frac{\partial \tilde S}{\partial q_1}}_{\frac{\partial W}{\partial q_1}},\ \dots,\ p_f=\underbrace{\frac{\partial\tilde S}{\partial q_f}}_{\frac{\partial W}{\partial q_f}},\ \cancel{t}\right)}_{(1)}+\underbrace{\frac{\partial \tilde S}{\partial t}}_{-E} \overset{(39.1)}{=} 0 \qquad (3)$$

$\Rightarrow (2)$✓ □

zeitunabhängig

Bemerkung: Der Ansatz (1) funktioniert nur, weil H NICHT explizit zeitabhängig ist.
Wäre $H = H(t)$ bräuchten wir eine Zeitabhängigkeit in $\frac{\partial\tilde S}{\partial t} = \text{Funkt. v. } t$ (4)

Beispiel: Harmonischer Oszillator

Hamilton-Funktion: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 := E = \text{const.}$ (1)

Erzeugende: $\tilde{S}(q, \alpha = E, t) \overset{(40.1)}{=} -Et + W(q, \alpha = E)$ $(t_0 = 0)$ (2)

Verkürzte Hamilton-Jacobi-Gleichung (40.2) für $W = W(q, E)$

$H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) \overset{(40.2)}{=} E$: $\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial}{\partial q} W(q,E)\right]^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \overset{(1)}{=} E$ (3)

Diff.Gl. für $W(q,E)$ $\frac{\partial}{\partial q} W(q,E) \overset{(3)}{=} \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}$ (4)

Integriert: $\int_{q_0}^{q} dq'$ (4): $W(q,E) - \underbrace{W(q_0,E)}_{\overset{(40.0,1)}{:=0}} = \int_{q_0}^{q} dq' \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q'^2}$ (5)

Explizite Lösung des Integrals nicht nötig, denn $p \overset{(35.3a)}{=} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}$ (1)

(35.3b) oder (39.2)

$\alpha = E$

$Q \overset{(39.2)}{=} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} \overset{(41.2)}{=} \frac{\partial}{\partial E}\left[-Et + W(q,E)\right]$ (2)

$\overset{(41.5)}{=} -t + \int_{q_0}^{q} dq' \cancel{\frac{1}{2}} \frac{\cancel{2}m}{\sqrt{2mE - m^2\omega^2 q'^2}}$ (3)

Bronstein

$= -t + \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{m\omega q}{\sqrt{2mE}}\right) + \cancel{\text{const.}}$ (4)

$=: \beta = \text{const.}$ $\quad$ ↳ absorbiert in β

Auflösen nach q(t) und p(t) liefert bekannte Lösung:

$q(t) = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin\left[\omega(t+\beta)\right]$ (5)

$p(t) \overset{(1,5)}{=} \sqrt{2mE} \sqrt{1 - \sin^2\omega(t+\beta)} = \sqrt{2mE} \cos\omega(t+\beta)$ (6)

Anfangsbedingungen bei t=0 legen α, β fest:

$E \overset{(41.1)}{=} \frac{p_0^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q_0^2$; $(\underset{t_0=0}{t} + \beta) \overset{(5,6)}{=} \arctan\left[m\omega \frac{q_0}{p_0}\right]$ (7) $\square$

Physikalische Interpretation der Erzeugenden: H63

Satz: Die Lösung $\tilde{S}(q,\alpha,t)$ der Hamilton-Jacobi-Gl. ist gerade die Wirkung entlang der physikalischen Trajektorie.

zeitunabhängig!

Beweis: Betrachte
$$\frac{d}{dt}\tilde{S}(q,\alpha,t) = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_k}\dot{q}_k \qquad (1)$$

(39.1) (35.3a)

Hamilton-Jacobi-Gl.: $H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$
$$= -H(q,p,t) + \sum_k p_k \dot{q}_k \qquad (2)$$

(2) = Legendre-Transf. der Hamilton-Funktion:
$$= L(q,\dot{q},t), \quad \text{mit} \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad (3)$$

(1) integriert:
$$\boxed{\tilde{S}(q,\alpha,t) = \int_{t_0}^{t} dt' \, L(q(t'),\dot{q}(t'),t')} + \underbrace{\tilde{S}(q_0,\alpha,t_0)}_{(40.0)\ :=0} \qquad (4)$$

Folgerung: Das Wirkungsintegral läßt sich als Erzeugende für gerade die kanonische Transf. interpretieren, die die Hamilton-Funktion "trivial" macht.

Bemerkung: Um (4) zu verifizieren, muss Lösung der Bewegungsgleichung bereits bekannt sein.

Beispiel: (43.4) für Harmonischen Oszillator: H64

$$\tilde{S}(q,E,t) \overset{(41.2)}{=} W(q,E) - E(t-t_0) \qquad (1)$$

$$\overset{(41.5)}{=} \int_{q_0}^{q} \underbrace{dq'}_{dt'\frac{dq'}{dt'}} \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q'^2} + \underbrace{W(q_0,E)}_{:=0} - E(t-t_0) \qquad (2)$$

Transformation der Integrationsvariablen: $q \to t$

$$= \int_{t_0}^{t} dt' \Big[\underbrace{\dot{q}(t')}_{(42.5)\ \omega\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\cos[\omega(t+\beta)]} \underbrace{\sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2(t)}}_{(42.6)\ \sqrt{2mE}\cos\omega(t+\beta)} - E \Big] \qquad (3)$$

$$= \int_{t_0}^{t} dt' \, 2E\left[\cos^2[\omega(t+\beta)] - \tfrac{1}{2}\right] \qquad (4)$$

Lagrange-Funktion:
$$L = T - V = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \qquad (5)$$

$$\overset{(42.5,6)}{=} E\left\{\cos^2[\omega(t+\beta)] - \sin^2[\omega(t+\beta)]\right\} \qquad (6)$$

$\cos^2 - \sin^2 = 2(\cos^2 - \frac{1}{2})$
$$= 2E\left\{\cos^2[\omega(t+\beta)] - \tfrac{1}{2}\right\} \qquad (7)$$

= Integrand v. (4), konsistent mit (43.4)