Zusammenfassung: Hamilton-Jacobi-Theorie

$v27$ – 16.07.07

Anwendbar für:	$H = H(q,p,t)$	$H = H(q,p)$	(1)
Ziel: finde kanonische Transformation, so dass folgende Größen automatisch erhalten sind:	alle ,	alle	(2)
Formale Forderung:	$\tilde{H}(P,Q,t) =$	$\tilde{H}(P,Q) =$ zugleich in allen Q_i	(3)
Bewegungsgleichungen für neue Variablen:	$\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} =$,	$\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} =$	(4a)
	$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k}$	$\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k}$	(4b)
Lösungen für neue Variablen:	$Q_k =$, $P_k =$	$Q_k =$, $P_k =$	(5)
Erzeugende, die gewünschte Transf. liefert:	$S =$ Hamiltonsche Wirkungsfunktion	$W =$ Charakteristische Hamilton-Funktion (verkürzte Wirkung)	(6)

Erzeugende wird bestimmt durch die partielle Hamilton-Jacobi-Gleichung (HJG):

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \qquad H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) - \alpha_1 = 0 \qquad (7)$$

[bedeutet: ersetze p_k durch $\partial S / \partial q_k$]

Die vollständige Lösung der HJG enthält n Integrationskonstanten, die gleich den erhaltenen Impulsen gesetzt werden können:

$$\gamma_i := P_i = \alpha_i = \text{const.} \qquad (8)$$

Vollständigen Lösungen der HJG sind also Funktionen der neuen Impulse:

$$S = \quad , \qquad W = \qquad (9)$$

Eine Hälfte der Transformationsgleichungen ist automatisch erfülllt (da genutzt in Konstruktion der HJG):

$$p_k(q,\alpha,t) = \quad , \qquad p_k(q,\alpha) = \qquad (10)$$

Die andere Hälte der Transformationsgleichungen,

$$Q_k(q,\alpha,t) = \quad , \qquad Q_k(q,\alpha,t) = \qquad (11)$$

lässt sich auflösen nach den alten Koordinaten, und liefert somit die gewünschte Lösung der Bewegungsgl.:

$$q = \qquad (12)$$

Anfangsbedingungen für Koordinaten und Impulse, eingesetzt in (10) und (11), legen die Konstanten fest:

$$\alpha = \quad , \qquad \beta = \qquad (13)$$

Falls H nicht von der Zeit abhängt, gilt:

$$S(q,\alpha,t) = W(q,\alpha) - \alpha_1 t \qquad (14)$$

Separation der Variablen in Hamilton-Jacobi-Gleichung

Wir wissen bereits: falls H nicht von t abhängt, separiert die Erzeugende in zwei Beiträge, linear in t bzw. unabhängig von t:

Charakteristische Hamilton-Funktion

$$\tilde{S}(q,\alpha,t) = -\alpha_1 t + W(q,\alpha) \qquad (1)$$

denn dann reproduziert die HJG die t-unabhängigkeit von H:

$$H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \qquad (2)$$

Analog gilt:
falls H ausserdem zyklisch in einer Koordinate ist, z.B. in q_f, $H = (q_1 \dots q_{f-1}, p_1 \dots p_f)$
kann auch W(q,P) in zwei Beiträge separiert werden, linear in q_f bzw. unabhängig von q_f

KEINE SUMME

$$W(q,\alpha) = \qquad (3)$$

Grund: dann reproduziert (3) die Tatsache, dass der zu q_f konjugierte Impuls erhalten ist:

$$p_f \overset{(35.3a)}{=} \frac{\partial W}{\partial q_f} = \qquad (4)$$

HJG (2) vereinfacht sich zu:

$$H(q_1,\dots,q_{f-1}, \qquad) = \alpha_1 \qquad (5)$$

(Für allgemeine Diskussion, unter welchen Umständen HJ-Gl. separierbar ist, siehe Goldstein, Kapitel 10.4.)

Beispiel: Zentralkraft-Problem: V = V(r)

Wähle Polarkoordinaten in der Bahnebene: (z = 0 = konst.)

Zwischenrechnung: Finde Hamilton-Funktion H = H(q,p):

Kinetische Energie:
[Blatt 6, Beispielaufgabe (1e)']

$$T = \frac{1}{2} m \left[\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right] \qquad (1)$$

Kanonische Impulse:

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m} \qquad (2a)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}, \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2} \qquad (2b)$$

Hamilton-Funktion:
$H(q,p) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$

$$H = p_\rho \dot{\rho} + p_\varphi \dot{\varphi} - L \qquad (3)$$

$$= p_\rho \frac{p_\rho}{m} + p_\varphi \frac{p_\varphi}{m\rho^2} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{p_\rho}{m}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{p_\varphi}{m\rho^2}\right)^2 - V\right] \qquad (4)$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}\left[p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2}\right] + V(\rho)} \qquad (5)$$

H49

Notationskonvention: $q_1 =\quad , \alpha_1 = \quad , q_2 = \quad , \alpha_2 = \quad , \alpha_1 = \quad ,$ (1)

Charakteristische Hamilton-Funktion laut (47.3):

$$W(q,\alpha) \overset{(47.3)}{=} \alpha_f q_f + W'(q_1,\dots,q_{f-1}, \alpha_1,\dots,\alpha_f), \tag{2}$$

Kurznotation

Hier: $$W(\rho,\varphi,\alpha_1,\alpha_\varphi) = \tag{3}$$

bedeutet: ersetze durch

Hamilton-Jacobi-Gl. laut (47.5):

$$H\left(q_1,\dots,q_{f-1}, \frac{\partial W'}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial W'}{\partial q_{f-1}}, \alpha_f\right) = \alpha_1 \tag{4}$$

Hier: $$\frac{1}{2m}\left[\quad + \frac{\quad}{\rho^2}\right] + V(\rho) = \alpha_1 \tag{5}$$

(5) aufgelöst nach $\frac{\partial W'}{\partial \rho}$: $$\frac{\partial W'}{\partial \rho} = \tag{6}$$

H50

Volle Erzeugende, (49.3):

W =

$$\boxed{W = \alpha_\varphi \varphi \pm \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \sqrt{2m[\alpha_1 - V(\rho')] - \alpha_\varphi^2/\rho'^2}} \tag{1}$$

Transformationsgl.:

$$\delta_{k1} t + \beta_k = Q_k(q,\alpha,t) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} \tag{2}$$

(2) mit $k=1$:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \frac{\pm m}{\sqrt{2m[\alpha_1 - V(\rho')] - \alpha_\varphi^2/\rho'^2}} \tag{3}$$

(3) gibt Radius als Funktion der Zeit , konsistent mit ZP7.3 !!

(2) mit $k=2$:

$$\frac{\partial W}{\alpha_\varphi} = \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \frac{\mp \alpha_\varphi/\rho'^2}{\sqrt{2m[\alpha_1 - V(\rho')] - \alpha_\varphi^2/\rho'^2}} \tag{4}$$

(4) gibt Winkel als Funktion des Radius , liefert also Bahnkurve, konsistent mit ZP8.2 !!

HJ-Formalismus ist sehr mächtig - zentrale Ergebnisse folgen mit sehr wenig Aufwand!

Für analoge Behandlung der Zentralkraft in Kugelkoordinaten: siehe Goldstein.

Winkel-Wirkungs-Variablen (WWV)

Für Systeme, deren Bewegung periodisch erfolgt, liefern WWV einen Weg, die Frequenzen direkt zu bestimmen (ohne erst die Bewegungsgleichungen berechnen zu müssen!).

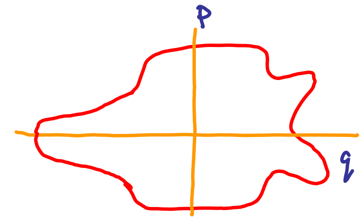
WWV mit einem Freiheitsgrad

H sei konservativ: $H = H(q, p)$ (1)

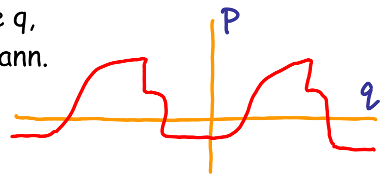
(1) aufgelöst nach Impuls: $p =$ (2)

Wir unterscheiden nun zwei Arten von periodischer Bewegung:

Def: "Libration": Im Phasenraum ist Bahn geschlossen, q und p sind beide periodische Funktionen der Zeit mit deselben Frequenz. (Beispiel: Harm. Oszillator)



Def: "Rotation": Impuls p ist periodische Funktion von der Koordinate q, die einen Winkel darstellt und deren Wert unbeschränkt zunehmen kann. (Beispiel: rotierender starrer Körper)



Folgende Diskussion gilt für beide Arten.

Def: "Wirkungsvariable" $J :=$ (1)

Integral erfolgt über eine vollständig Periode der Libration oder Rotation.

Da J nur von abhängt, werde nun in HJ-Theorie J (anstatt) als neuer Impuls gewählt:

(1) invertiert: $\alpha_1 =$ (2)

Charakteristische Hamilton-Funktion: $W =$ (3)

Def: "Winkelkoordinate": (konjugiert zu J) $\left[Q_k \overset{(35.36)}{=} \frac{\partial F_2}{\partial P_k} \right]$ $w =$ (4)

Bewegungsgl. für w: $\left[\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k} \right]$ $\dot{w} =$ (hängt nur von J ab!) (5)

Lösung v. (5): $w(t) =$ (6)

Bisherige Stragegie wäre nun: (4) nach q auflösen, q = q(w,J), (6) einsetzen,
Der besondere Sinn von WWV liegt jedoch darin, dass Frequenz der Bahn bestimmt werden kann, ohne q = q(t) explizit zu kennen:

Veränderung von w während einer Periode:

$$\Delta w = w(t+\tau) - w(t) \tag{1}$$

Alternativ gilt aber auch:

$$\Delta w = \tag{2}$$

$$\overset{(52.4)}{=} \oint dq \, \frac{\partial}{\partial q} \tag{3}$$

da J entlang ganzer Bahn konstant ist, ziehe Ableitung vor Integral:

$$= \oint dq \tag{4}$$

$$\left[P_k \overset{(35.3a)}{=} \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \right]$$

(1) = (4) liefert allgemeinen Ausdruck für Frequenz:

$$\boxed{\frac{1}{\tau} = } \tag{5}$$

Beispiel: Harmonischer Oszillator (siehe auch S. H41-42)

$$H \overset{(41.1)}{=} \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial q} W(q, \alpha) \overset{(41.4)}{=} \sqrt{2m\alpha_1 - m^2\omega^2 q^2} \tag{2}$$

$$J \overset{(52.1)}{=} \oint dq \, p \overset{(2)}{=} \oint dq \sqrt{2m\alpha_1 - m^2\omega^2 q^2} \tag{3}$$

Substitution:

$q =$

$dq =$

$$= \tag{4}$$

[Integralgrenzen entsprechen einer Periode von q]

Hamilton als Funktion von J: $\Longrightarrow$

$$\alpha_1 \overset{(4)}{=} \tag{5}$$

Frequenz des HO:

$$\nu \overset{(53.5)}{=} \frac{\partial H}{\partial J} \tag{6}$$

Lösungen für q(t), p(t), ausgedrückt durch

$$w \overset{(52.6)}{=} \nu t + \beta$$

$$q(t) \overset{(42.5)}{=} \frac{2E}{m\omega^2} \sin[\omega(t+\beta')] \overset{(54.5)}{=} \qquad (1)$$

$$p(t) \overset{(42.6)}{=} \sqrt{2mE}\cos[\omega(t+\beta')] \overset{(54.5)}{=} \qquad (2)$$

(1), (2) können aufgefasst werden als Transf.-Gl. von alten zu neuen WW-Variablen.

Vorschau: Quantenmechanik

Gebundene Systeme werden durch diskrete Energien gekennzeichnet. Erster (beinahe) erfolgreicher Ansatz, die diskreten Energien für das Wasserstof-Atom vorherzusagen, gelang Bohr 1913 mit dem Postulat (nur semiklassisch beinahe korrekt), dass Wirkungsvariablen nur diskrete Energien annehmen können:

Plancksche Konstante h

$$J = \oint dq\, p \qquad (3)$$

Angewandt auf den Harmonischen Oszillator, sind erlaubte Energien:

$$J \overset{(54.4)}{=} \frac{2\pi E}{\omega}$$

Korrektes qm Ergebnis ist

$$E = \qquad (4)$$