

Zusammenfassung: Hamilton-Jacobi-Theorie

27-16.07.07

H45

Anwendbar für:

$$H = H(q, p, t)$$

$$H = H(q, p) \quad (1)$$

Ziel: finde kanonische Transformation, so dass folgende Größen automatisch erhalten sind:

$$\text{alle } Q_i, P_i$$

$$\text{alle } P_i \quad (2)$$

Formale Forderung:

$$\tilde{H}(P, Q, t) = 0$$

$$\tilde{H}(P, Q) = \alpha_1 = P_1 \quad (3)$$

zyklisch in allen Q_i

Bewegungsgleichungen für neue Variablen:

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} = 0$$

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} = \delta_{1k} \quad (4a)$$

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} = 0$$

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} = 0 \quad (4b)$$

Lösungen für neue Variablen:

$$Q_k = \beta_k, P_k = \alpha_k$$

$$Q_k = \beta_k + \delta_{1k}t, P_k = \alpha_k \quad (5)$$

Erzeugende, die gewünschte Transf. liefert:

$$S = S(q, P, t)$$

Hamiltonsche Wirkungsfunktion

$$W = W(q, P) \quad (6)$$

Charakteristische Hamilton-Funktion
(verkürzte Wirkung)

Erzeugende wird bestimmt durch die partielle Hamilton-Jacobi-Gleichung (HJG):

$$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

$$H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) - \alpha_1 = 0 \quad (H46) \quad (7)$$

↗ bedeutet: ersetze p_k durch $\partial S / \partial q_k$ ↗

Die vollständige Lösung der HJG enthält n Integrationskonstanten, die gleich den erhaltenen Impulsen gesetzt werden können:

$$p_i := P_i = \alpha_i = \text{const.} \quad (8)$$

Vollständigen Lösungen der HJG sind also Funktionen der neuen Impulse:

$$S = S(q, \alpha, t)$$

$$W = W(q, \alpha) \quad (9)$$

Eine Hälfte der Transformationsgleichungen ist automatisch erfüllt (da genutzt in Konstruktion der HJG):

$$p_k(q, \alpha, t) = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad p_k(q, \alpha) = \frac{\partial W}{\partial q_k} \quad (10)$$

(11)

Die andere Hälfte der Transformationsgleichungen,

$$\beta_k = Q_k(q, \alpha, t) = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}, \quad \delta_{1k}t + \beta_k = Q_k(q, \alpha, t) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_k}$$

lässt sich auflösen nach den alten Koordinaten, und liefert somit die gewünschte Lösung der Bewegungsgl.:

$$q = q(\alpha, \beta, t) \quad (12)$$

Anfangsbedingungen für Koordinaten und Impulse, eingesetzt in (10) und (11), legen die Konstanten fest:

$$\alpha = \alpha(q_0, p_0, t_0), \quad \beta = \beta(q_0, p_0, t_0) \quad (13)$$

Falls H nicht von der Zeit abhängt, gilt:

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha_1 t \quad (14)$$

Separation der Variablen in Hamilton-Jacobi-Gleichung

H47

Wir wissen bereits: falls H nicht von t abhängt, separiert die Erzeugende in zwei Beiträge, linear in t bzw. unabhängig von t :

$$\tilde{S}(q, \alpha, t) = -\alpha_1 t + W(q, \alpha) \quad (1)$$

↖ Charakteristische Hamilton-Funktion

denn dann reproduziert die HJG die t -unabhängigkeit von H :

$$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \Rightarrow H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = \alpha_1 = \text{const.} \quad (2)$$

Analog gilt:

falls H ausserdem zyklisch in einer Koordinate ist, z.B. in q_f , $H = (q_1, \dots, q_{f-1}, p_1, \dots, p_f)$ kann auch $W(q, P)$ in zwei Beiträge separiert werden, linear in q_f bzw. unabhängig von q_f :

$$W(q, \alpha) = \alpha_f q_f + W'(q_1, \dots, q_{f-1}, p_1, \dots, p_f) \quad (3)$$

KEINE SUMME

Grund: dann reproduziert (3) die Tatsache, dass der zu q_f konjugierte Impuls erhalten ist:

$$p_f = \frac{\partial W}{\partial q_f} = \alpha_f = \text{const.} \quad (4)$$

HJG (2) vereinfacht sich zu:

$$H(q_1, \dots, q_{f-1}, \frac{\partial W'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W'}{\partial q_{f-1}}, \alpha_f) = \alpha_1 \quad (5)$$

(Für allgemeine Diskussion, unter welchen Umständen HJ-Gl. separierbar ist, siehe Goldstein, Kapitel 10.4.)

Beispiel: Zentralkraft-Problem: $V = V(r)$

H48

Wähle Polarkoordinaten in der Bahnebene: (ρ, φ) ($z = 0 = \text{const.}$)

Zwischenrechnung: Finde Hamilton-Funktion $H = H(q, p)$:

Kinetische Energie:

[Blatt 6, Beispielaufgabe (1e)]

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2] \quad (1)$$

Kanonische Impulse:

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m \dot{\rho} \quad , \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m} \quad (2a)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \rho^2 \dot{\varphi} \quad , \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m \rho^2} \quad (2b)$$

Hamilton-Funktion:

$$H(q, p) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$$

$$H = p_\rho \dot{\rho} + p_\varphi \dot{\varphi} - L \quad (3)$$

$$= p_\rho \frac{p_\rho}{m} + p_\varphi \frac{p_\varphi}{m \rho^2} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{p_\rho}{m} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{p_\varphi}{m \rho^2} \right)^2 \right] - V \quad (4)$$

$$H = \frac{1}{2m} \left[p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} \right] + V(\rho) \quad \varphi = q_f = \text{zyklisch} \quad (5)$$

(5)

Notationskonvention:

$$q_1 = \rho, \quad \alpha_1 = E, \quad q_2 = \varphi, \quad \alpha_2 = \alpha_\varphi,$$

Charakteristische Hamilton-Funktion laut (47.3):

$$W(q, \alpha) \stackrel{(47.3)}{=} \alpha_f q_f + W'(q_1, \dots, q_{f-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_f), \quad (2)$$

Kurznotation

Hier:

$$W(\rho, \varphi, \alpha_1, \alpha_\varphi) = \alpha_\varphi \varphi + W'(\rho, \alpha_1, \alpha_\varphi) \quad (3)$$

Hamilton-Jacobi-Gl. laut (47.5):

$$H(q_1, \dots, q_{f-1}, \frac{\partial W'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W'}{\partial q_{f-1}}, \alpha_f) = \alpha_1 \quad (4)$$

↙ bedeutet: ersetze p_k durch $\frac{\partial W'}{\partial q_k}$
↘ p_f α_f

Hier:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial W'}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{\alpha_\varphi^2}{\rho^2} \right] + V(\rho) = \alpha_1 \quad (5)$$

(5) aufgelöst nach $\frac{\partial W'}{\partial \rho}$:

$$\frac{\partial W'}{\partial \rho} = \pm \sqrt{2m[\alpha_1 - V(\rho)] - \frac{\alpha_\varphi^2}{\rho^2}} \quad (6)$$

Volle Erzeugende, (49.3):

$$W = \alpha_\varphi \varphi + W'$$

 $\int dp$ (49.6)

$$W = \alpha_\varphi \varphi \pm \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \sqrt{2m[\alpha_1 - V(\rho')] - \alpha_\varphi^2 / \rho'^2} \quad (1)$$

Transformationsgl.: (46.10)

$$\delta_k t + \beta_k = Q_k(q, \alpha, t) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} \quad (2)$$

(2) mit $k=1$:

$$t + \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \left(\frac{\pm m}{\sqrt{2m[\alpha_1 - V(\rho')] - \alpha_\varphi^2 / \rho'^2}} \right) \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \int \quad (3)$$

(3) gibt Radius ρ als Funktion der Zeit, konsistent mit ZP7.3 !!(mit $\beta_1 = -t_0$)(2) mit $k=2$:

$$\beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_\varphi} = \varphi + \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' \left(\frac{\mp \alpha_\varphi / \rho'^2}{\sqrt{2m[\alpha_1 - V(\rho')] - \alpha_\varphi^2 / \rho'^2}} \right) \stackrel{(1)}{=} \frac{\partial}{\partial \alpha_\varphi} \int \quad (4)$$

(4) gibt Winkel φ als Funktion des Radius ρ , liefert also Bahnkurve, konsistent mit ZP8.2 !!(mit $\beta_2 = \varphi_0$)

HJ-Formalismus ist sehr mächtig - zentrale Ergebnisse folgen mit sehr wenig Aufwand!

Für analoge Behandlung der Zentralkraft in Kugelkoordinaten: siehe Goldstein.

Winkel-Wirkungs-Variablen (WWV)

H51

Für Systeme, deren Bewegung periodisch erfolgt, liefern WWV einen Weg, die Frequenzen direkt zu bestimmen (ohne erst die Bewegungsgleichungen berechnen zu müssen!).

WWV mit einem Freiheitsgrad ($q = q, p = p$)

H sei konservativ:

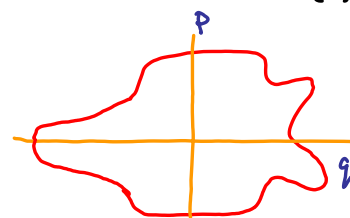
$$H = H(q, p) \stackrel{\text{kein } t!}{=} \alpha_1 \quad (= E) \quad (1)$$

(1) aufgelöst nach
Impuls:

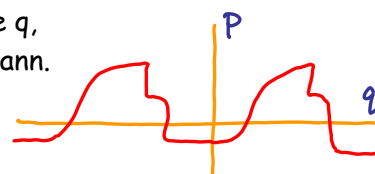
$$p = p(q, \alpha_1) \quad (2)$$

Wir unterscheiden nun zwei Arten von periodischer Bewegung:

Def: "Libration": Im Phasenraum ist Bahn geschlossen, q und p sind beide periodische Funktionen der Zeit mit derselben Frequenz.
(Beispiel: Harm. Oszillator)



Def: "Rotation": Impuls p ist periodische Funktion von der Koordinate q , die einen Winkel darstellt und deren Wert unbeschränkt zunehmen kann.
(Beispiel: rotierender starrer Körper)



Folgende Diskussion gilt für beide Arten.

Def: "Wirkungsvariable"

$$J := \oint dq \, p(q, \alpha_1) = J(\alpha_1) \quad (1) \quad \underline{H52}$$

Integral erfolgt über eine vollständig Periode der Libration oder Rotation.

Da J nur von α_1 abhängt, werde nun in HJ-Theorie J (anstatt α_1) als neuer Impuls gewählt:

(1) invertiert:

$$H = \alpha_1 = \alpha_1(J) \Rightarrow H = H(J) \quad (2)$$

Charakteristische
Hamilton-Funktion:

$$W = W(q, J) \quad (3)$$

(variable)
Def: "Winkelkoordinate":

$$(konjugiert zu J) \quad \left[Q_k^{(35-36)} = \frac{\partial W}{\partial p_k} \right] \quad \omega := \frac{\partial W}{\partial J} \quad [= \omega(q, J)] \quad (4)$$

$$\text{Bewegungsgl. für } \omega: \left[\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \right] \quad \dot{W} = \frac{\partial H}{\partial J} =: \nu(J) \quad (\text{hängt nur von } J \text{ ab!}) \quad (5)$$

$\alpha_1 = \text{const!}$

Lösung v. (5):

$$W(t) = \nu t + \beta \quad (6)$$

Bisherige Strategie wäre nun: (4) nach q auflösen, $q = q(w, J)$, (6) einsetzen, $q = q(\nu t + \beta, J)$ H53
 Der besondere Sinn von WWV liegt jedoch darin, dass Frequenz der Bahn bestimmt werden kann, ohne $q = q(t)$ explizit zu kennen:

Veränderung von w
 während einer Periode:

$$\Delta w = w(t + \tau) - w(t) \stackrel{(52.6)}{=} \nu \tau \quad (1)$$

↑ Periode

Alternativ gilt
 aber auch:

$$\Delta w = \oint \frac{\partial w}{\partial q} dq \quad \text{Änderung v. } w \text{ für gegebene Änd. v. } q \quad (2)$$

$$\stackrel{(52.4)}{=} \oint dq \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial w}{\partial J} \quad (3)$$

da J entlang ganzer Bahn
 konstant ist, ziehe
 Ableitung vor Integral:

$$= \frac{d}{dJ} \oint dq \frac{\partial w}{\partial q} = \frac{d}{dJ} \oint dq p \stackrel{(35.3a)}{=} \frac{d}{dJ} \oint dq p \stackrel{(52.1)}{=} \frac{dJ}{dJ} = 1 \quad (4)$$

$$\left[p_k \stackrel{(35.3a)}{=} \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \right]$$

$$\Delta w = 1$$

(1) = (4) liefert
 allgemeinen Ausdruck
 für Frequenz:

$$\frac{1}{\tau} \stackrel{(1)}{=} \nu(J) = \frac{\partial H}{\partial J} \quad \text{Wow!} \quad (5)$$

Beispiel: Harmonischer Oszillator (siehe auch S. H41-42)

H54

$$H \stackrel{(41.1)}{=} \frac{1}{2} m p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 = \alpha_1 \quad (= E) \quad (1)$$

$$p \stackrel{(35.3a)}{=} \frac{\partial}{\partial q} W(q, \alpha) \stackrel{(41.4)}{=} \sqrt{2m\alpha_1 - m^2\omega^2 q^2} \quad (2)$$

$$J \stackrel{(52.1)}{=} \oint dq p \stackrel{(2)}{=} \oint dq \sqrt{2m\alpha_1 - m^2\omega^2 q^2} \quad (3)$$

$\sim \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \cos \theta$

Substitution:

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega^2}} \sin \theta$$

$$dq = \sqrt{\frac{2\alpha_1}{m\omega^2}} \cos \theta$$

$$= \frac{2\alpha_1}{\omega} \int_0^{2\pi} d\theta \cos^2 \theta$$

$\underbrace{\quad}_{\pi}$

[Integralgrenzen entsprechen
 einer Periode von q] (4)

$$J = 2\pi \alpha_1 / \omega$$

Hamilton als Funktion
 von J :

$$\Rightarrow \alpha_1 \stackrel{(4)}{=} \frac{J\omega}{2\pi} \stackrel{(1)}{=} H(J) \quad (5)$$

Frequenz des HO:

$$\nu \stackrel{(53.5)}{=} \frac{\partial H}{\partial J} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (6)$$

Lösungen für $q(t)$, $p(t)$,
ausgedrückt durch

$$\begin{aligned} 2\pi \omega &= 2\pi(\nu t + \beta) \\ &= \omega t + \underbrace{2\pi\beta}_{\omega\beta'} \end{aligned}$$

$$q(t) = \stackrel{(4.2.5)}{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin[\omega(t+\beta')] \stackrel{(5.4.5)}{=} \sqrt{\frac{J}{\pi m \omega}} \sin 2\pi \omega t \quad |H55| \quad (1)$$

$$p(t) = \stackrel{(4.2.6)}{\sqrt{2mE}} \cos[\omega(t+\beta')] \stackrel{(5.4.5)}{=} \sqrt{\frac{m J \omega}{\pi}} \cos 2\pi \omega t \quad (2)$$

(1), (2) können aufgefasst werden als Transf.-Gl. von alten zu neuen WW-Variablen.

Vorschau: Quantenmechanik

Gebundene Systeme werden durch diskrete Energien gekennzeichnet. Erster (beinahe) erfolgreicher Ansatz, die diskreten Energien für das Wasserstoff-Atom vorherzusagen, gelang Bohr 1913 mit dem Postulat (nur semiklassisch beinahe korrekt), dass Wirkungsvariablen nur diskrete Energien annehmen können:

$$J = \oint dq p = n h \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Plancksche Konstante h

Angewandt auf den
Harmonischen Oszillator,
sind erlaubte Energien:

$$J \stackrel{(5.4.4)}{=} \frac{2\pi E}{\omega} = n h \quad \Rightarrow \quad E = \underbrace{\left(\frac{h}{2\pi}\right)}_{\hbar} \omega n$$

Korrektes qm Ergebnis ist

$$E = \hbar \omega (n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$