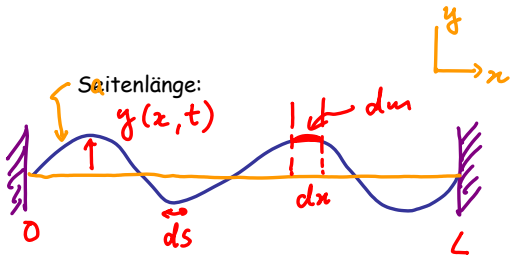
Schwingende Seite: Wellengleichung und Quantisierung

Ziel: Herleitung und Lösung der Wellengleichung für schwingende Seite.
Illustration, wie Randbedingungen zu Quantisierungseffekten führen.
Zerlegung der Bewegung in Eigenmoden.

Herleitung der Wellengleichung (siehe Blatt 8, Aufgabe 4)



Ungestreckte Ruhelänge: ℓ
Gestreckte Ruhelänge: $L > \ell$

Potentielle Energie der ruhenden Seite:

$$V_0 = \frac{1}{2} k (L-\ell)^2 \qquad y' = \frac{\partial y}{\partial x} \qquad (1)$$

Spannung (= Kraft in) der ruhenden, gestreckten Seite:

$$F := \left| \frac{\partial V}{\partial L} \right| = k(L-\ell) \qquad (2)$$

Gesamtlänge während Schwingung:

$$\tilde{L}(t) = \int ds = \int_0^L dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = L + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L dx\, y'^2}_{:=\Delta} \qquad (3)$$

(Annahme: $\sqrt{1+\frac{1}{2}y'^2+\dots}$)

Zusätzliche Streckung durch Schwingung:

$$\Delta = \tilde{L}(t) - L \ll L - \ell \qquad (4)$$

Potentielle Energie während Schwingung:

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} k (\tilde{L} - \ell)^2 \qquad (1)$$

($\tilde{L} = L + \Delta$)

Für kleine Schwingungen:

$$\approx \underbrace{\frac{1}{2} k (L-\ell)^2}_{(1.1)\ V_0} + \underbrace{k(L-\ell)\Delta}_{(1.2)\ F} + \underbrace{\frac{1}{2} k \Delta^2}_{=0} \qquad (2)$$

$$\tilde{V}[y] = V_0 + \frac{F}{2}\int_0^L dx\, y'^2 \qquad (3)$$

Massenelement: (τ: Massendichte)

$$dm = \tau\, dx \qquad v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y} \qquad (4)$$

Kinetische Energie der schwingenden Seite:

$$\tilde{T} = \int dm\, \frac{1}{2} v_y^2 = \frac{\tau}{2}\int_0^L dx \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \qquad (5)$$

Lagrange-Funktion:

$$Lag = \tilde{T} - \tilde{V} = -V_0 + \int_0^L dx \left[\underbrace{\frac{\tau}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}_{(5)} - \underbrace{\frac{F}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}_{(3)} \right] \qquad (6)$$

($-V_0$: uninteressant)

Lagrange-Dichte: $\mathcal{L}$

Hamilton-Prinzip d. kleinsten Wirkung besagt: für physikalische Schwingung $y = y(x,t)$ ist die Wirkung

$$S = \int_0^T dt\, Lag \overset{(2.6)}{=} \int_0^T dt \int_0^L dx\, \mathcal{L}\left(\cancel{y}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial t}, \cancel{t}\right) \quad (1)$$

extremal. Das liefert ein Variationsproblem für $y = y(x,t)$ (siehe Seite L65,66)

Euler-Lagrange-Gl.:
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial y/\partial x)} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial y/\partial t)} \quad (2)$$

Für L von (2.6):
$$0 \overset{(2)}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\frac{F}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(2\frac{\tau}{2}\frac{\partial y}{\partial t}\right) \quad (3)$$

Wellengleichung (WG):
$$0 \overset{(3)}{=} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \underbrace{\frac{\tau}{F}}_{:= 1/c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (4)$$

Kurznotation:
$$0 = \partial_x^2 y - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 y \quad (5)$$

Wellengeschw.:
$$c \overset{(4)}{=} \sqrt{F/\tau} \quad : \dim: m/s \quad (6)$$

Satz: "Superpositionsprinzip": Seien y1(x,t) und y2(x,t) Lösungen der WG (3.5). Dann ist die "Superposition" oder "lineare Überlagerung" y1(x,t) + y2(x,t) ebenfalls eine Lösung. (1)

Beweis: nutzt Linearität (nur erste Potenzen von y !) der Wellengleichung:
$$\partial_t^2[y_1 + y_2] - \frac{1}{c^2}\partial_x^2[y_1 + y_2] = 0 \quad (2)$$

y1 und y2 sind Lösungen:
$$\left(\partial_t^2 - \frac{1}{c^2}\partial_x^2\right)y_1 + \left(\partial_t^2 - \frac{1}{c^2}\right)y_2 = 0 + 0 \quad (3)$$

Satz: Sei f(z) eine beliebige 2fach-differenzierbare Fn. von z. Dann sind $f_\pm(x,t) = f(x \pm ct)$ Lösungen der WG.

$\partial_z f(z) =: f'(z)$

$\partial_z^2 f(z) =: f''(z)$

$$\partial_x f_\pm(\overbrace{x \pm ct}^{z}) = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{z = x \pm ct} = f'(x \pm ct) \quad (4a)$$

$$\partial_x^2 f_\pm(x \pm ct) = f''(x \pm ct) \quad (4b)$$

$$\partial_t f_\pm(x \pm ct) = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\bigg|_{z = x \pm ct} = \pm c\, f'(x \pm ct) \quad (4c)$$

$$\partial_t^2 f_\pm(x \pm ct) = (\pm c)^2 f''(x \pm ct) \quad (4d)$$

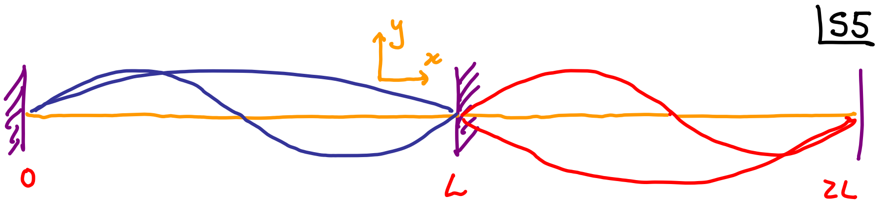
$$\left(\partial_x^2 - \frac{1}{c^2}\partial_y^2\right) f(x \pm ct) = \left[1 - \frac{1}{c^2}c^2\right] f''(x \pm ct) = 0 \quad (5)$$

□

Randbedingungen:
Seite ist fest bei $x = 0, L$

$y(0,t) = 0$ (1a)

$y(L,t) = 0$ (1b)



Mathematisch gesprochen ist y(x,t), für alle t, eine periodische Funktion, mit Periode $2L$
(obwohl wir uns nur für einen eingeschränkten Bereich interessieren, mit $0 \le x \le L$).

Folglich läßt sich y(x,0) als Fourier-Reihe darstellen:

$$y(x,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i \frac{2\pi n}{2L} x}, \quad \frac{2\pi n}{2L} = k_n \qquad k_n = \frac{\pi n}{L} \tag{1}$$

Forderung: y = reell

$$y^*(x,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^*_{-n} e^{+i \frac{2\pi n x}{2L}} =: y(x,0) \quad \forall x \tag{2}$$

$n \to -n$

$$\Rightarrow \quad a^*_{-n} = a_n \tag{3}$$

Ansatz für allemeines t:
($n \to -n$ in ②)

$$y(x,t) = \sum_{n=-}^{\infty} \left[a_n e^{ik_n(x+ct)} + \tilde{a}_{-n} e^{-ik_n(x-ct)} \right] \tag{1}$$

garantiert, dass (1) die WG (3.5) erfüllt!

Randebedingung:

$\omega_n = c k_n$

$$\overset{(5.1)}{0} = y(0,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a_n e^{ik_n ct} + \tilde{a}_{-n} e^{+ik_n ct} \right], \quad k_n c = \omega_n, \quad \tilde{a}_{-n} := -a_n \tag{2}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \quad \tilde{a}_{-n} = -a_n \tag{3}$$

(3) eingesetzt in (1):

$$y(x,t) \overset{(1)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2i\, a_n e^{i\omega_n t} \underbrace{\left[e^{ik_n x} - e^{-ik_n x} \right] \frac{1}{2i}}_{\sin k_n x} \tag{4}$$

$\sin k_n(L) = \sin \frac{\pi n}{L} \cdot L = 0$
$\Rightarrow$ (5.1b) ✓

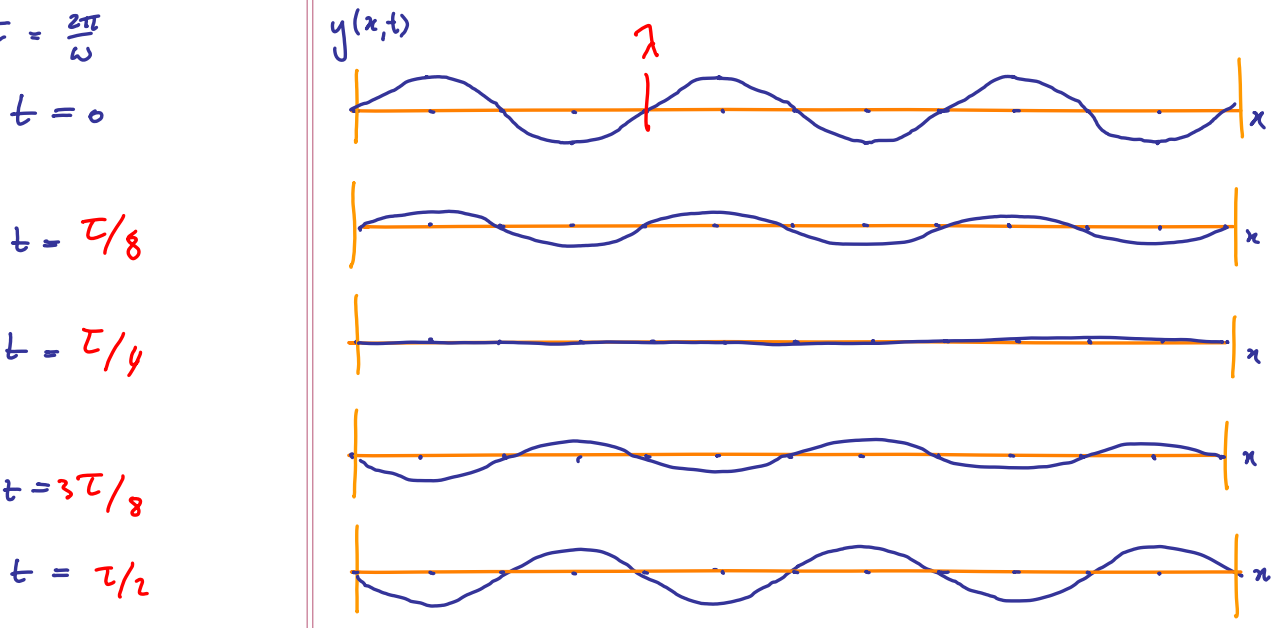
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x \left[\underbrace{2i(a_n - \overset{(5.3)}{a^*_n})}_{-4\,\mathrm{Im}\, a_n =: A_n \in \mathbb{R}} \cos\omega_n t + \underbrace{2i(a_n + a^*_n)\, i}_{-4\,\mathrm{Re}\, a_n := B_n \in \mathbb{R}} \sin\omega_n t \right] \tag{5}$$

Allgemeine Form der Lösung der WG mit festen Randbed:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x \underbrace{\left[A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t \right]}_{C_n \cos(\omega_n t + \phi_n)} \tag{6}$$

(6.1) ist Überlagerung stehender Wellen. Betrachte eine Mode: (1) 57

$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$



Beachte: Frequenz und Wellenlänge der stehende Welle sind verknüpft, $\omega_n = c\,k_n$ (1)
und quantisiert:

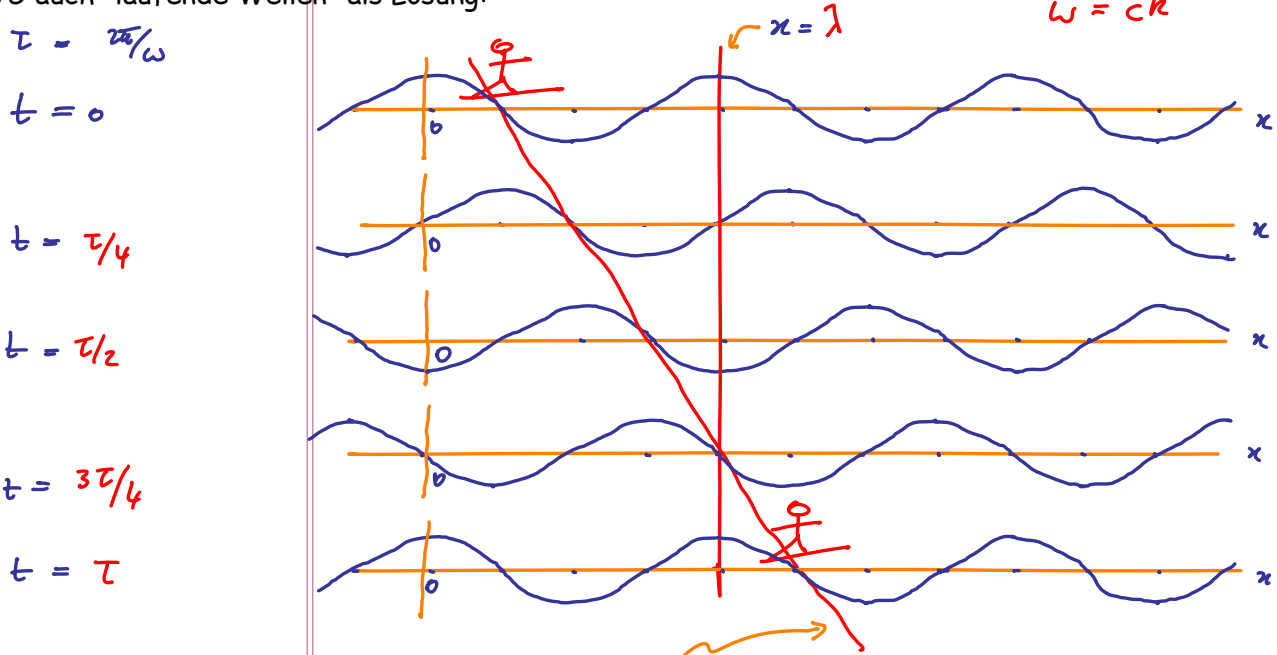
$$k_n = \frac{\pi n}{L} \quad , \quad \omega_n = \frac{c\pi n}{L} \qquad (2)$$

Grund für die "Quantisierung": Vorgabe von Randbedingungen!

Zwischenbemerkung: Ohne Randbed. hat WG auch "laufende Wellen" als Lösung: (1) 58

$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ $\quad \omega = ck$

$\tau = 2\pi/\omega$



Für Surfer, der sich mit Welle mitbewegt, ist Phase $= \varphi = \omega t - kx = \text{konstant}$

Für alle Punkte mit $\varphi = \text{konstant}$ gilt: $0 = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega - k\frac{\partial x}{\partial t}$ (2)

$\frac{\partial x}{\partial t} \equiv v_{ph}$

Phasengeschwindigkeit: $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$ (3)

Zerlegung einer stehenden Welle nach "Normalmoden" ("Eigenmoden"):

Gegeben sei

$$y(x, t=0) =: y(x) \quad , \text{ mit} \quad y(0) = y(L) = 0 \tag{1}$$

Fourier-Ansatz:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n x \quad , \quad k_n = \frac{\pi n}{L} \tag{2}$$

Mit Fourier-Koeffizienten:

$$a_m = \frac{1}{L} \int_0^L dx \, \sin k_m x \; y(x) \tag{3}$$

Check (2) eingesetzt in (3) liefert:

$$a_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\frac{1}{L} \int_0^L dx \, \sin k_m x \, \sin k_n x}_{I_{m,n} = \delta_{mn}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_m \delta_{nm} \; (= a_m) \tag{4}$$

Zeitentwicklung:

$$y(x,t) = \sum_n a_n \sin k_n x \cos \omega_n t \tag{5}$$

$\cos \omega_n t = 1$ bei $t = 0$

Zwischenrechnung:

$$I_{m,n} := \int_0^L dx \, \sin(k_n x) \sin(k_m x) \tag{1}$$

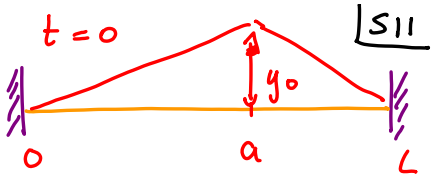
$$= \frac{1}{L} \int_0^L dx \left[\cos(k_n - k_m) x \; (1) \; - \cos(k_n + k_m) x \; (2) \right] \tag{2}$$

$$(1) = \begin{cases} \left. \dfrac{\sin(k_n - k_m) x}{L(k_n - k_m)} \right|_0^L = 0 & \text{if } n \neq m \\ \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_0^L dx = 1 & \text{if } n = m \end{cases} \tag{3a}$$

$$(2) = \left. \frac{\sin(k_n + k_m) x}{k_n + k_m} \right|_0^L = 0. \tag{3b}$$

$$\Rightarrow \quad I_{m,n} = \delta_{mn} \tag{4}$$

Beispiel: gezupfte Seite:



$$y(x) = \begin{cases} x \, \frac{y_0}{a} & \forall\, x \in [0,a] \\ (L-x)\, \frac{y_0}{L-a} & \forall\, x \in [a,L] \end{cases}$$

Nachrechnen, mittels (9.3)!

$$a_n = \frac{2y_0}{\pi^2 (1-\Theta)\Theta} \, \frac{\sin m\pi\Theta}{m^2}, \qquad \Theta = a/L$$

http://www.jensign.com/JavaScience/www/plucker.html

http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/string/Fixed.html

http://www.colorado.edu/physics/phet/simulations/stringwave/stringWave.swf