

Evolution des Weltalls

SS 07 LMU

Skala

Objekt

$1 L_j \approx 10^{13} \text{ km}$

Sterne

$10^6 L_j$

Galaxien

$10^7 L_j$

Galaxienhaufen

$5 \times 10^8 L_j$

homogene, isotrope
Materie ("Staub")

Kosmol. Prinzip:

Skala $5 \times 10^8 L_j$: Dichteschwankungen
und Individualgeschw. der Galaxien
ausgewirkt: Weltall breitet von
jeder Stelle aus den gleichen Aus-
blick.

1) Kinematik des Weltalls

1929: Expansion & Rotverschiebung

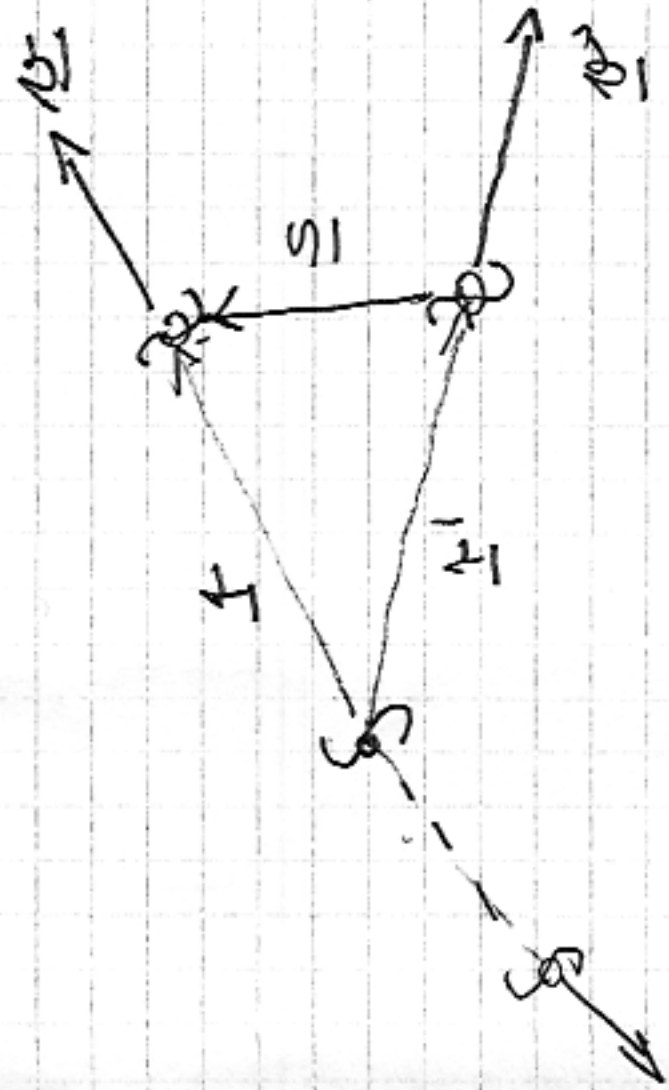
~~16/10/07~~
16/10/07

$$\frac{v}{c} = \frac{\dot{r}}{c} = H \cdot r$$

Hubble-Gesetz

hier Fluchtgesch. $\propto$ Entfernung

Hubble vs KP?



$$\begin{aligned} \dot{s} &= H \cdot s \\ \dot{s} &= H \cdot s \\ \frac{\dot{s}}{s} &= \dot{s} \\ &= H(t - t_0) = H \cdot s \end{aligned}$$

Jede typ. Galaxie entfernt sich von jeder anderen typ. Galaxie nach dem Hubble'schen Gesetz

2) Dynamik des Universums

Ges von Galaxien
Gravitations + NW
Newton'sche Mech. } "Newton'sche Kosmologie"



$S(X, t)$: Massendichte

$$M = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho$$

$$\begin{aligned} m \dot{v} &= -G \frac{M m}{r^2} \\ &= -m \nabla \phi \end{aligned}$$

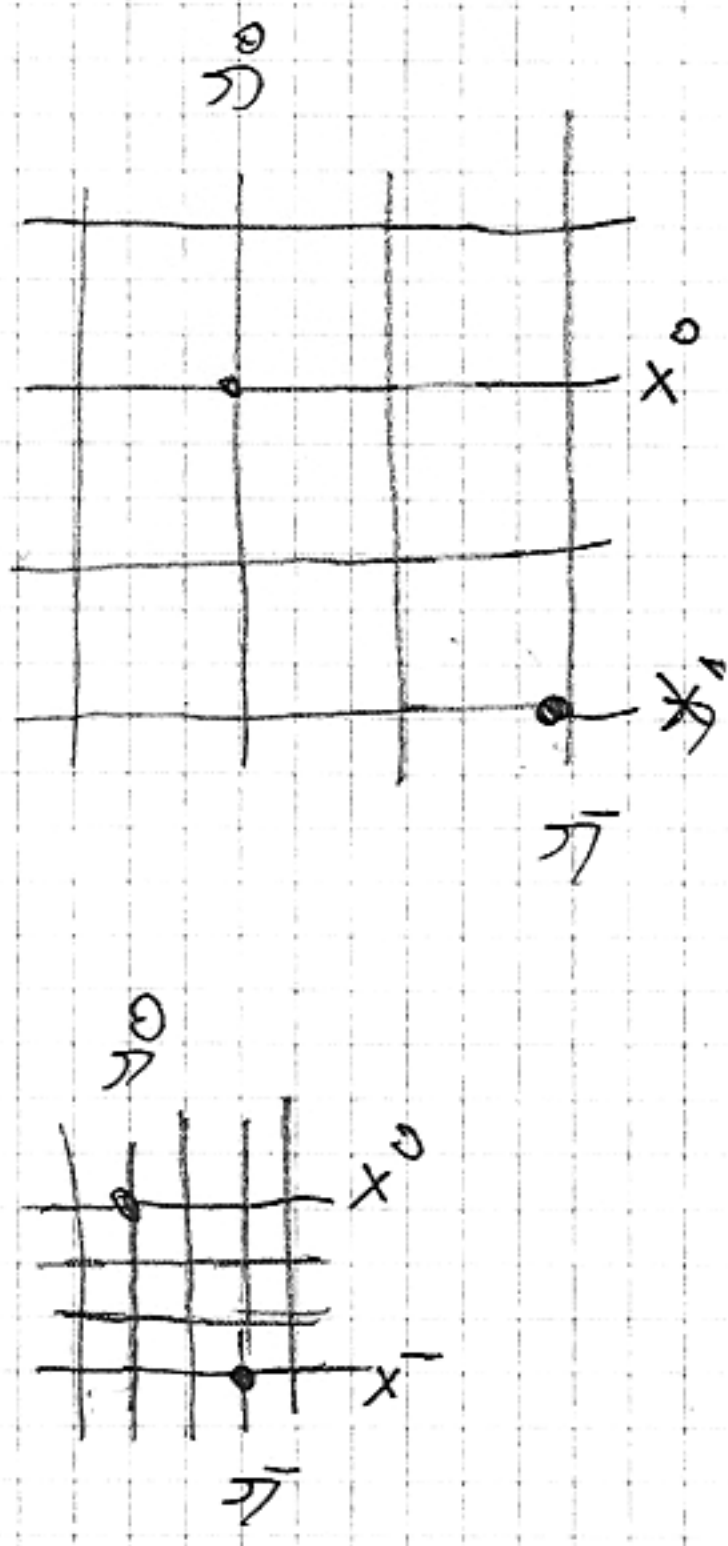
W: Testteilchen

$$\phi_G = -G \frac{M}{r} = \frac{4\pi}{3} G \rho r^2$$

Energiesatz: $\frac{M \dot{r}^2}{2} + m \phi_G(r) = E_{\text{tot}} = \text{konst}_t$ (1)

Ansatz $r(t) = a(t) r_0$
liniärer Skalenfaktor

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$: mitgeführte Koordinat des Testteilchens



$$\dot{r} = \dot{r} = \dot{a} r_0 = \frac{\dot{a}}{a} r \Rightarrow$$

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = H(t)$$

Dynamik liefert $H = H(t)$: Evolution

1,6) :

$$\dot{a}^2 \frac{m}{2} \tau_0^2 - \frac{4\pi}{3} G \rho a^2 m \tau_0^2 = E_{tot} \Rightarrow$$

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi}{3} G \rho a^2 + k = 0 \quad (3)$$

$$k := - \frac{2 E_{tot}}{m \tau_0^2} = \text{const} \quad \begin{cases} < 0, & E_{tot} > 0 \\ = 0, & E_{tot} = 0 \\ > 0, & E_{tot} < 0 \end{cases}$$

(3) gilt unverändert auch in ART
(aber $k \leftrightarrow$ "Raumkrümmung")

$$\frac{k}{\tau_0^2} = - \frac{E_{tot}}{m c^2} \cdot \frac{1}{\tau_0^2}$$

Ziel: $a = a(t)$

brannen $\dot{S} = S(a)$

Newton'sche Dyn: Massenerhaltung

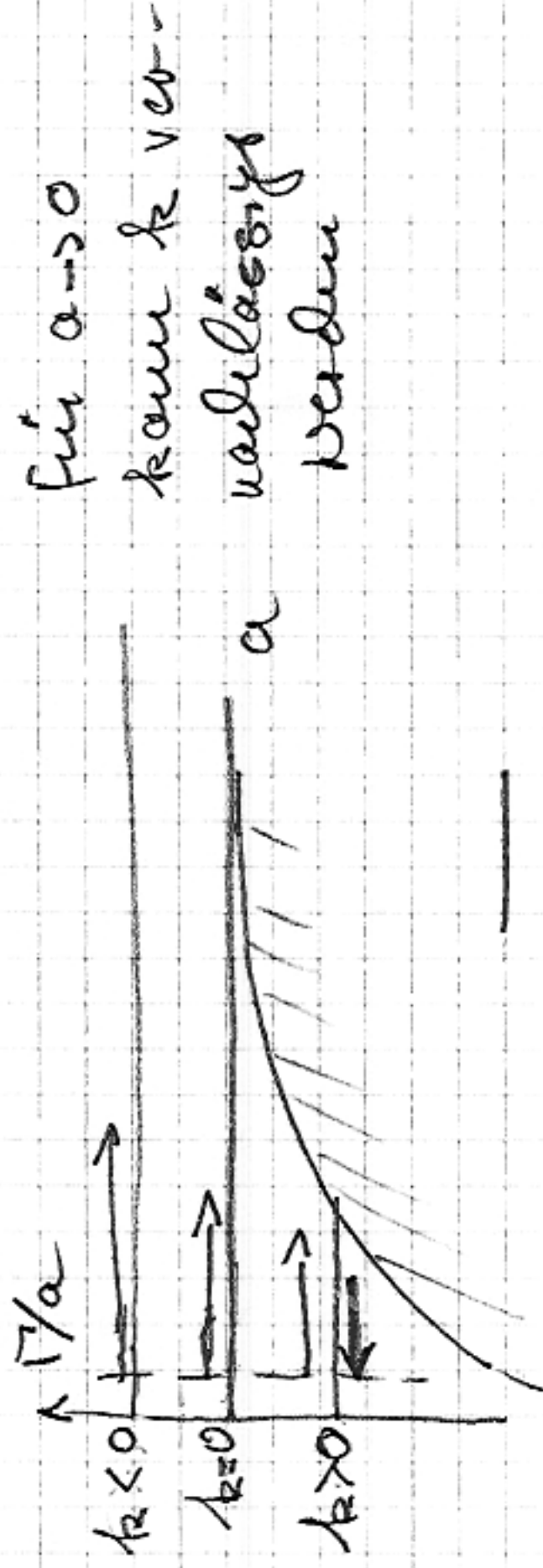
$$M(t) \stackrel{!}{=} M(t_0) : \dot{a}(t) S(t) = \dot{a}(t_0) S(t_0) = \text{const.}$$

$$\Rightarrow S \propto a^{-3} \quad (4)$$

3,4) $\Rightarrow$

$$\dot{a}^2 = \frac{\Gamma}{a} - k \quad \text{ART} \quad (Friedmanngl.) \quad (5)$$

$$\Gamma = \frac{8\pi}{3} G \rho_0 S_0 > 0$$



Lösungen v. (5)

$$(i) k=0 : \dot{a} = (\Gamma/a)^{1/2}$$

$$\int_0^t \sqrt{a} da = \sqrt{\Gamma} \int_0^t dt' \Rightarrow$$

$$a(t) = \Gamma^{1/2} \left(\frac{3}{2} t \right)^{2/3}$$

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{2}{3} t^{-1}$$

(Einstein - de Sitter)

(ii) $k > 0$ ($E_{\text{tot}} < 0$)

$$x = \frac{k}{\Gamma} ; \quad \dot{x} = \frac{k^{3/2}}{\Gamma} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^{1/2} \Rightarrow$$

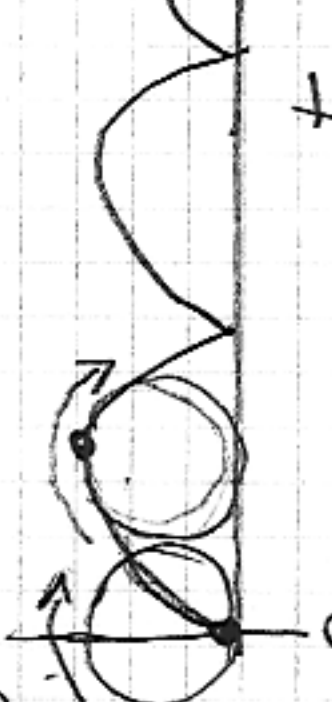
$$\int_0^x \frac{\sqrt{x^3} dx'}{\sqrt{1-x'^2}} = \frac{k^{3/2}}{\Gamma} t$$

$$x^3 = \sin^2(y/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos y)$$

$$dx' = \sin(y/2) \cos(y/2)$$

$$\sqrt{1-x^3} = \cos(y/2), \quad \sqrt{x^3} = \sin(y/2)$$

$$\begin{aligned} \int_0^y \sin^2(y/2) dy &= \frac{1}{2} \int_0^y (1 - \cos y) dy \\ &= \frac{k^{3/2}}{\Gamma} t = \frac{1}{2} (y - \sin y) \end{aligned}$$

$$\left| \begin{aligned} t &= \frac{\Gamma}{2k^{3/2}} (y - \sin y) & \text{Zykloidengl.} \\ a(t) &= \frac{\Gamma}{2k} (1 - \cos y) \end{aligned} \right|$$


$$k=0 \leftrightarrow S_0 = S_c \quad \text{"lmt. Dichte"}$$

Massenerhaltung $S \sim a^{-3}$ gilt nicht mehr,
wenn S sehr groß wird! Planck-Zeit

$\Rightarrow$ Universum besteht aus Körpern, d.h. aus
Gas von Photonen

$$\frac{\text{Energie}}{c^2} \stackrel{!}{=} (\text{schwere}) \text{ Masse} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} S \propto a^{-4} \propto t^{-4}$$

Thermodyn.

$$(3) \rightarrow (3_s): \quad \dot{a}^2 - \frac{a^2}{a^2} + k = 0 \Rightarrow a(t) \propto t^{1/2} \quad (\text{statt } t^{3/2})$$

$\exists$ Unkoll bleibt

$$T_s(t) = \frac{a(t_0)}{a(t)} T_s(t_0) \quad T_s(t_0) \approx 2.7 \text{ K}$$

kosm. Mikrowellen-
hintergrundstrahlung
heute