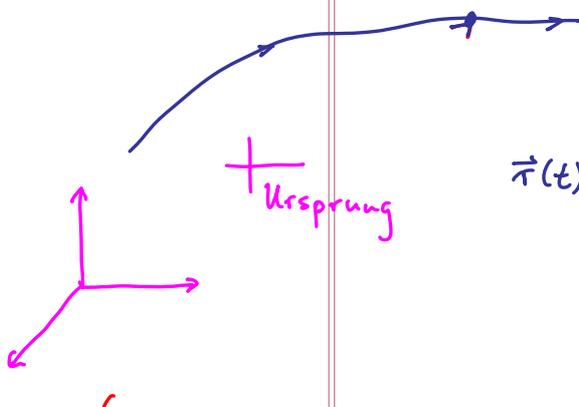


Newton'sche Sätze (Originalformulierung)

1. Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte dazu gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.
2. Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.
3. Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich; oder: die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

Begriffsbildung: Massenpunkt, Bahnkurve, Masse, Kraft, Beschleunigung, Drehimpuls, Energie, Erhaltungssätze ...

1. Bahnkurve



$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{e}_x + y(t) \hat{e}_y + z(t) \hat{e}_z$$

$$:= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t) \hat{e}_x + \dot{y}(t) \hat{e}_y + \dot{z}(t) \hat{e}_z$$

Beschleunigung:

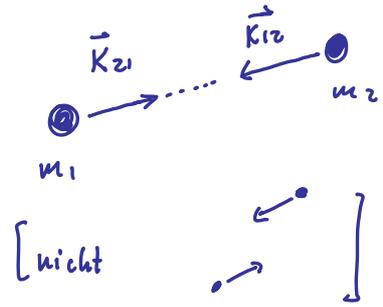
$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t) \hat{e}_x + \ddot{y}(t) \hat{e}_y + \ddot{z}(t) \hat{e}_z$$

NM4

3. Axiom (N3):
(Actio = Reactio)

1.ter Zusatz:

Kraft entlang Verbindungslinie



2.ter Zusatz:
(Superpositions-
Prinzip)

Gesamtkraft

Summe der Einzelkräfte

Gültigkeit von N3 ist eingeschränkt, denn N3 impliziert "instantane" Reaktion, im Widerspruch zur speziellen Relativitätstheorie (nichts propagiert schneller als Licht)

Ausweg: Quantenfeldtheorie: Kraft via Austausch von Photonen f. EM-WW, Gluonen f. starke WW, Gravitonen für Gravitation

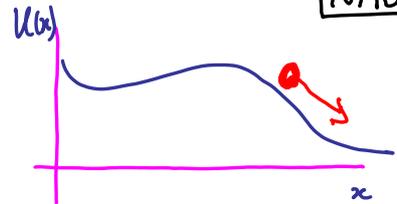
Beispiel: Lösung von N2 für 1-dimensionales Problem

NM5

Betrachte:

$$m \ddot{x} = K(x(t)) \quad (1)$$

↙ ortsabhängige Kraft



wobei

$$K(x) = - \partial_x U(x) \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x} \quad (2)$$

$$(1) \quad m \ddot{x} = - \partial_x U(x(t)) \quad (3)$$

$$\text{Kettenregel} = \quad (4)$$

Integrieren:

$$= \quad (5)$$

Integrationskonstante (zeitunabhängig)

Gesamtenergie:
(erhaltene Größe,
weil zeitunabhängig)

$$\boxed{\quad \quad \quad} \quad (6)$$

Kinetische Potentielle Energie

NM 6

(5.5) nach \dot{x} gelöst:

(1)

Trennung der Variablen:

(2)

(3)

Anfangsbedingungen:

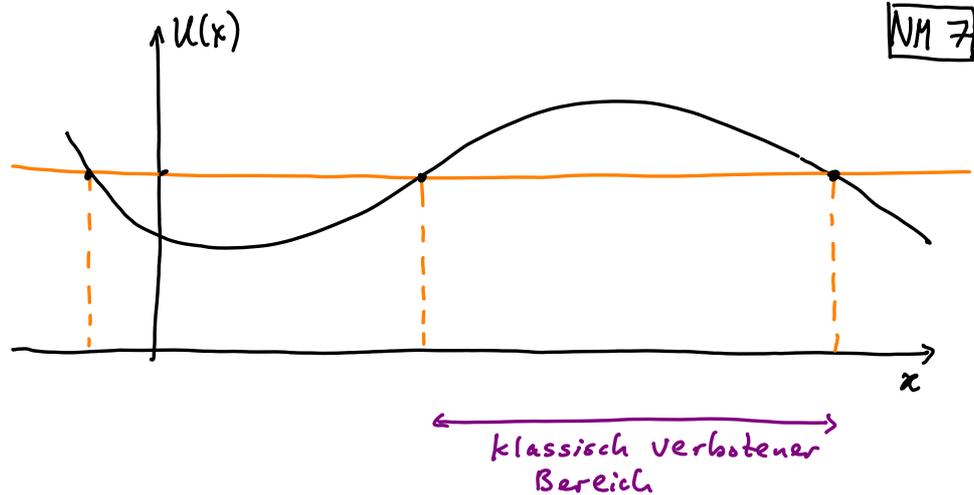
$$x(t_0) = \quad , \quad \dot{x}(t_0) = \quad ,$$

(4)

legen Integrationskonst. fest:

Graphische Analyse:

NM 7



Umkehrpunkte:

Bei $\dot{x} = 0$, also bei

Zwischen Umkehrpunkten ist Bewegung periodisch:

Periode:

(1)

3. Erhaltungssätze

NM8

Zunächst mittels N2 hergeleitet, später (eleganter) mittels Lagrange-Formalismus
 "zu Fuß" "tieferer Grund":

Symmetrien!

NZ:

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{K} \quad (1)$$

Impulserhaltung:

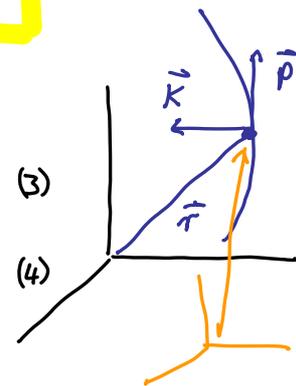
$$\vec{K} = 0 \Rightarrow \quad (2)$$

Definition Drehimpuls:

$$\vec{l} =$$

$$\vec{M} =$$

Definition Drehmoment:
 (beide abhängig von



NM9

(1)

Drehimpulserhaltung:

$$\dot{\vec{l}} = \vec{M} \quad (\text{"N2 für Rotationen"})$$

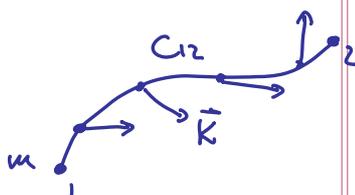
Falls

$$\vec{M} = 0 \quad (2)$$

(3)

Definition v. Arbeit:

Teilchen (Masse m) bewege sich unter Einfluss einer äusseren Kraft von 1 nach 2 entlang Weg C_{12} . Die von der Kraft auf m geleistete Arbeit ist:

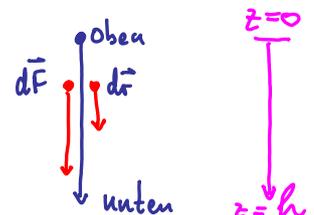


vom Kraftfeld auf m übertragene Energie

(4)

Vorzeichen? Denke an Schwerkraft:

$$W = \int d\vec{r} \cdot \vec{F}_g \quad (5)$$



$d\vec{r} =$

$$(9.4) \quad A_{1 \rightarrow 2} =$$

(1)

$\boxed{N/M \cdot s}$

=

(2)

=

(3)

= Energieänderung auf Grund der Geschwindigkeitsänderung

Definition:
Kinetische Energie

$$E_K = T =$$

(4)

Einheiten:

$$\text{Joule [J]} =$$

(5)

=

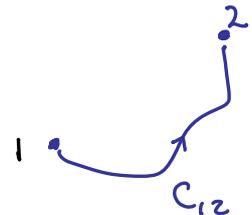
Def: Konservatives Kraftfeld

Ein Kraftfeld konservativ genannt, falls Arbeit zwischen 1 und 2 unabhängig vom Weg ist.

$\boxed{N/M \cdot s}$

$$(9.4) \quad A_{12} = \int d\vec{r} \cdot \vec{K}_{\text{Kons}}$$

(1)



(2)

Für ein konservatives Kraftfeld ist die entlang geschlossenem Weg verrichtete Arbeit

$$\int d\vec{r} \cdot \vec{K}_{\text{Kons}} + \int d\vec{r} \cdot \vec{K}_{\text{Kons}}$$

(3)



(4)

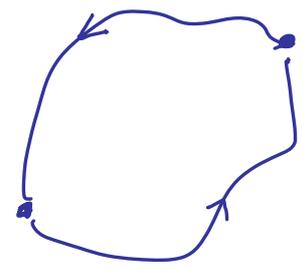
Theorem: Konservatives Kraftfeld

- (i) ist rotationlos;
- (ii) kann als Gradient eines skalaren Feldes ausgedrückt werden.

Beweis (i):

$$0 \stackrel{(11.4)}{=} \int d\vec{r} \cdot \vec{K}_{\text{Kons}} \quad (\text{Stokes})$$

(1)



Stokes Theorem:

=

(2)

(2) gilt für beliebige Fläche, also gilt:

⇒

(3)

"rotationslos"

Vorzeichen: Konvention

Beweis (ii):

Jedes Feld der Form

$$\vec{K}_{\text{Kons}} = \nabla u$$

skalares Feld, heißt "Potential", oder "potenzielle Energie" (4)

erfüllt (i):

(5)

Nullpunkt beliebig wählbar

denn:

(6)

(denn $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$)

(11b.6) ausführlich:

$$(\nabla \times \nabla u)_i$$

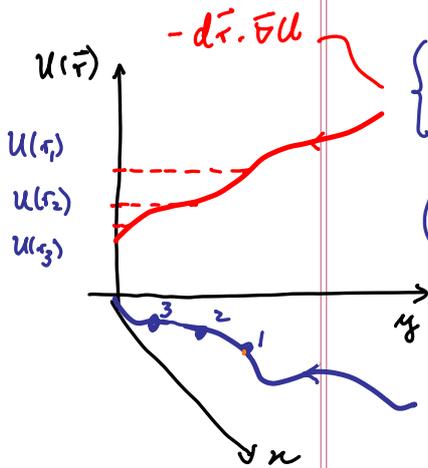
$$= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \nabla_j \nabla_k u$$

$$= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k u$$

$$= \sum_{jk} \frac{1}{2} (\epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k u + \underbrace{\epsilon_{ikj}}_{-\epsilon_{ijk}} \partial_k \partial_j u)$$

$$= \sum_{jk} \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (\underbrace{\partial_j \partial_k - \partial_k \partial_j}_{=0}) u$$

Energieerhaltungssatz:
Integriere (11a.4)



$\left\{ \begin{array}{l} - \text{Änderung v.} \\ U \text{ in Richtung} \\ \text{v. } d\vec{r} \\ \text{"} \\ (+ \text{Änderung v. T}) \end{array} \right.$

$$U(r_1) - U(r_2)$$

$$= \int_1^2 \underbrace{d\vec{r} \cdot [-\vec{\nabla} U(\vec{r})]}_{-dU} \quad (1)$$

$$\stackrel{(11a.4)}{=} \quad (2)$$

$$\stackrel{(9.4)}{=} \quad (3)$$

$$\stackrel{(10.3)}{=} \quad (4)$$



$$(5)$$

Entlang einer Trajektorie (Bahn) in einem konservativem Kraftfeld bleibt die

Alternative Herleitung:

$$d\vec{r} = dt \vec{v} = dt \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)$$

$$T_2 - T_1 = A_{1 \rightarrow 2} \stackrel{(12.3, 1)}{=} \int_1^2 d\vec{r} \cdot (-\vec{\nabla} U(\vec{r}(t)))$$

$$(1)$$

$$= - \int dt \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) \cdot \frac{dU(\vec{r}(t))}{d\vec{r}} \quad (2)$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} U(\vec{r}(t)) \quad \text{Kettenregel} \quad (3)$$

$$= - [U(\vec{r}(t_2)) - U(\vec{r}(t_1))] = U_1 - U_2 \quad (4)$$

$$(5)$$

Energieerhaltung gilt nicht für zeitabhängige Potentiale:

Falls $U = U(\vec{r}(t), t)$, gilt (2) → (3) nicht:
 \uparrow explizite Zeitabhängigkeit,

$$\text{denn dann: } \frac{d}{dt} U(\vec{r}(t)) = \vec{\nabla} U \cdot \dot{\vec{r}} \quad (6)$$

Grund: externes System ist für zeitänderung des Potentials verantwortlich, und kann Energie zuführen oder abziehen.

Bewegungsgl. $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K}$ ist Diff. Gl. 2.

Erhaltungssätze heißen "Integrale der Bewegung", weil sie Diff.-Gl. 1. Ordnung sind

Erhaltungssätze:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + U = E = \text{const} & \text{" 1. Ord} \\ m \dot{\vec{r}} = \vec{p} = \text{const} & \text{" 1. Ord} \\ \vec{r} \times (m \dot{\vec{r}}) = \vec{L} = \text{const} & \text{" 1. Ord} \end{cases}$$

Beispiel einer kons. Kraft: Lorentzkraft

Kraft auf geladenes Teilchen im Magnetfeld:

$$\begin{aligned} & \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \\ &= \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) \\ &= \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

Energie ist erhalten, also ist Kraft konservativ.

$$\vec{K}_{\text{Lorentz}} = \tag{1}$$

$$T_2 - T_1 = A_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{K} \tag{2}$$

$$d\vec{r} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) dt = \int \tag{3}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \tag{4}$$

