T1: Theoretische Mechanik, SoSe 2008

(v1) 15.4.08 $\boxed{\text{NM0}}$

Jan von Delft

[Newtonsche Mechanik Seite 0]

Newtonsche Sätze (Originalformulierung)

1. Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte dazu gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.

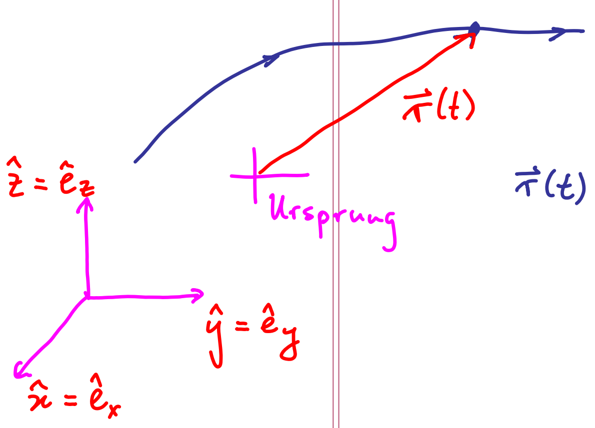
2. Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

3. Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich; oder: die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

$\boxed{\text{NM1}}$

Begriffsbildung: Massenpunkt, Bahnkurve, Masse, Kraft, Beschleunigung, Drehimpuls, Energie, Erhaltungsätze ...

1. Bahnkurve



$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{e}_x + y(t)\,\hat{e}_y + z(t)\,\hat{e}_z$$

$$:= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\,\hat{e}_x + \dot{y}(t)\,\hat{e}_y + \dot{z}(t)\,\hat{e}_z$

Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\,\hat{e}_x + \ddot{y}(t)\,\hat{e}_y + \ddot{z}(t)\,\hat{e}_z$

2. Newton's Axiome

NM2

1. Axiom (N1):
(Definition von Inertialsystem)

Es gibt Bezugsysteme (BS), in denen kräftefreie Bewegung durch $\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v} = \text{konst.}$ beschrieben wird.

Diese BS heißen Inertialsysteme (IS).

N1 gilt nicht in jedem BS (z.B. nicht auf Karusell)

In IS sind physikalischen Gesetze besonders einfach

N1 ist nicht Spezialfall von N2 mit Kraft = 0, sondern Definition von IS.

NM3

2. Axiom (N2):
(beschreibt Dynamik)

In einem IS folgt die Bewegung unter Einfluß einer Kraft folgendem Gesetz:

$$m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{\vec{K}}_{\text{Kraft}} \quad \text{im IS}, \quad \underbrace{\vec{p}}_{\text{Impuls}} = \underbrace{m}_{\text{Masse}} \, \underbrace{\vec{v}}_{\text{Geschw.}}$$

Einheit = $N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$

N2 beinhaltet
(i) Definition der Masse (vergleiche Beschl. für gleiche Kraft),
(ii) Definition der Kraft (als Beschleunigung mal Masse),
(iii) Aussage über Bahnbewegung

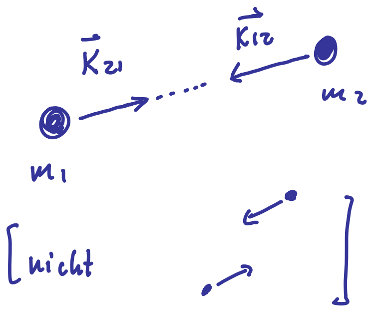
N2 gilt nur für "nicht-relativistische" Geschwindigkeiten:

$$v \ll c$$

NM4

3. Axiom (N3):
(Actio = Reactio)

$$\vec{K}_{actio} = -\vec{K}_{reactio}$$



1.ster Zusatz: Kraft entlang Verbindungslinie

2.ter Zusatz:
(Superpositions-Prinzip)

$$\vec{K} = \sum_i \vec{K}_i$$

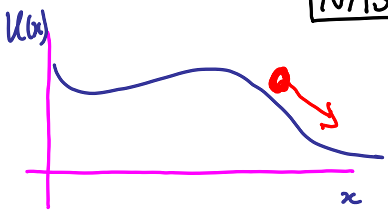
Gesamtkraft — Summe der Einzelkräfte

Gültigkeit von N3 ist eingeschränkt, denn N3 impliziert "instantane" Reaktion, im Widerspruch zur speziellen Relativitätstheorie (nichts propagiert schneller als Licht)

Ausweg: Quantenfeldtheorie: Kraft via Austausch von Photonen f. EM-WW, Gluonen f. starke WW, Gravitonen für Gravitation

NM5

Beispiel: Lösung von N2 für 1-dimensiones Problem



Betrachte: $m\ddot{x} = \underbrace{K(x(t))}_{\text{ortsabhängige Kraft}}$ (1)

Wobei $K(x) = -\partial_x U(x)$ $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ (2)

$\dot{x} \times$ (1): $m\dot{x}\ddot{x} = -\dot{x}\,\partial_x U(x(t))$ (3)

Kettenregel

$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x})^2 = -\frac{d}{dt}U(x(t))$ (4)

Integrieren: $\int dt$ (4): $\frac{m}{2}\dot{x}^2 = E - U(x(t))$ (5)

E: Integrationskonstante (zeitunabhängig)

Gesamtenergie:
(erhaltene Größe, weil zeitunabhängig)

$$\boxed{E = \underbrace{\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2}_{\text{Kinetische}} + \underbrace{U(x)}_{\text{Potentielle}}}$$ (6)

Kinetische — Potentielle — Energie

NM6

(5.5) nach $\dot{x}$ gelöst: $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}$ (1)

Trennung d. Variablen: $\int_{t_0}^{t} dt' = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{\dots}}$ (2)

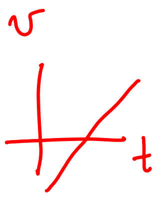
$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\left[\frac{2}{m}\left(E - U(x')\right)\right]^{1/2}}$$ (3)

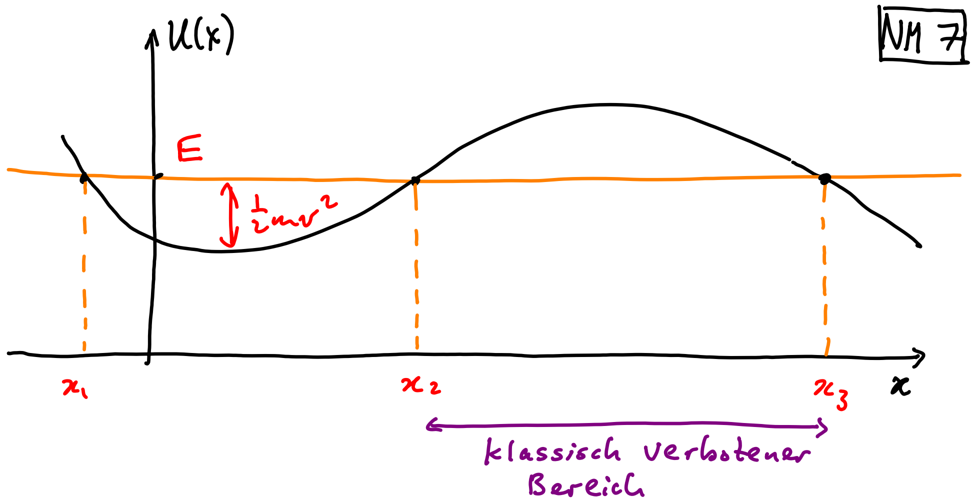
Anfangsbedingungen: $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$, (4)

legen Integrationskonst. fest: $E = \frac{1}{2} m v_0^2 + U(x_0)$

NM 7

Graphische Analyse:





Umkehrpunkte: Bei $\dot{x} = 0$, also bei x_1, x_2, x_3

Zwischen Umkehrpunkten ist Bewegung periodisch:

Periode: $\frac{1}{2} T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx'}{\left[\frac{2}{m}\left(E - U(x')\right)\right]^{1/2}}$ (1)

3. Erhaltungssätze

NM8

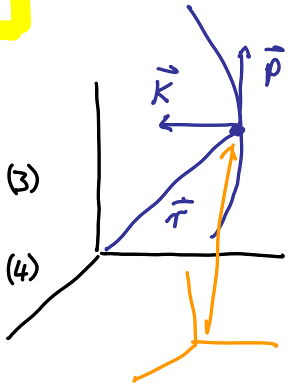
Zunächst mittels N2 hergeleitet, später (eleganter) mittels Lagrange-Formalismus
"zu Fuß" "tieferer Grund": Symmetrien!

N2: $\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{K}$, (1)

Impulserhaltung: $\vec{K} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konst.}$ (2)

Definition Drehimpuls: $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$ (3)

Definition Drehmoment: (beide abhänging von $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{K}$ (4)



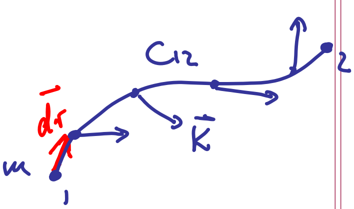
NM9

$$\frac{d}{dt}\vec{\ell} \overset{(8.3)}{=} \dot{\vec{r}} \times (m\dot{\vec{r}}) + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \overset{(8.1)}{=} \vec{K}$$
$$= 0 + \vec{r} \times \vec{K} \overset{(8.4)}{=} \vec{M}$$ (1)

Drehimpulserhaltung: $\dot{\vec{\ell}} = \vec{M}$ ("N2 für Rotationen") (2)

Falls $\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{\ell} = \text{konst.}$ (3)

Definition v. Arbeit: Teilchen (Masse m) bewege sich unter Einfluss einer äusseren Kraft von 1 nach 2 entlang Weg C_{12}. Die von der Kraft auf m geleistete Arbeit ist:

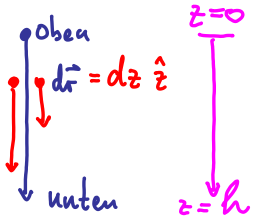


$$A_{1\to2} = \int_{C_{12}} d\vec{r} \cdot \vec{K} =$$ vom Kraftfeld auf m übertragene Energie (4)

Vorzeichen? Denke an Schwerkraft:

$$W = \int \overbrace{d\vec{r} \cdot \vec{F}_g}^{>0} > 0$$ (5) $mg\hat{z} = d\vec{F}$ $d\vec{r} = dz\,\hat{z}$

$$= \int_0^h dz\, mg = mgh \checkmark$$



NM10

$$A_{1\to 2} \overset{(9.4)}{=} \int_{t_1}^{t_2} (\vec v\, dt)\cdot(m\dot{\vec v}) \leftarrow N2 \qquad (1)$$

$$d\vec r = \frac{d\vec r}{dt}dt = \vec v\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\vec v)^2 \qquad (2)$$

$$= \frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \qquad (3)$$

= Energieänderung auf Grund der Geschwindigkeits-
änderung

Definition:
<u>Kinetische Energie</u>

$$E_K = T = \frac{1}{2} m v^2 \qquad (4)$$

Einheiten:

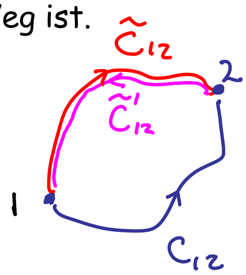
$$\text{Joule [J]} = kg\, m^2 s^{-2} \qquad (5)$$

$$= N \cdot m$$

NM11

Def: <u>Konservatives Kraftfeld</u>

Ein Kraftfeld konservativ genannt,
falls Arbeit zwischen 1 und 2 <u>unabhängig</u> vom Weg ist.



$$A_{12} \overset{(9.4)}{=} \int_{C_{12}} d\vec r \cdot \vec K_{kons} = \int_{\tilde C_{12}} d\vec r \cdot \vec K_{kons} \qquad (1)$$

$$= - \int_{\tilde C'_{12}} d\vec r \cdot \vec K_{kons} \qquad (2)$$

Für ein konservatives Kraftfeld ist die entlang geschlossenem Weg verreichte Arbeit = 0

$$0 = \int_{C_{12}} d\vec r \cdot K_{kons} + \int_{\tilde C'_{12}} d\vec r \cdot K_{kons} \qquad (3)$$

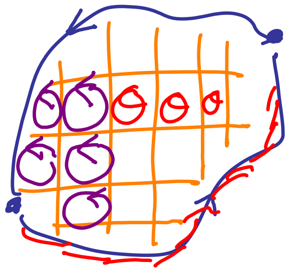
$$\boxed{0 = \oint d\vec r \cdot K_{kons}} \qquad (4)$$

NMIIa

Theorem: Konservatives Kraftfeld
(i) ist rotationlos;
(ii) kann als Gradient eines skaleren Feldes ausgedrückt werden.

Beweis (i):

$$0 \overset{(11.4)}{=} \oint d\vec{r} \cdot \vec{K}_{Kons} \qquad \text{(Stokes)} \qquad (1)$$



Stokes Theorem:

$$= \int_{Fläche} d\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{K}_{Kons}) \qquad (2)$$

(2) gilt für beliebige Fläche, also gilt:

$$\Longrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{K}_{Kons} = 0 \qquad (3)$$

"rotiationslos"

Beweis (ii):
Jedes Feld der Form

$$\boxed{\vec{K}_{Kons} = -\vec{\nabla}\left(U(\vec{r}) + U_0\right)} \qquad (4)$$

Vorzeichen: Konvention

$U(\vec{r})$: skalares Feld, heißt "Potential", oder "potenzielle Energie"

U_0: Nullpunkt beliebig wählbar

erfüllt (i):

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U = 0 \qquad (5)$$

denn:

$$\varepsilon_{ijk}\, \partial_j \partial_k U = 0 \qquad (6)$$

(denn $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$)

NMIIb

(11b.6) ausführlich:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U)_i$$

$$= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \nabla_j \nabla_k U$$

$$= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k U$$

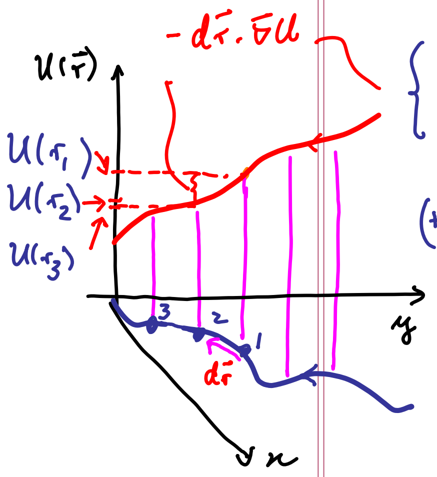
$$= \sum_{jk} \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k U + \underbrace{\varepsilon_{ikj}}_{-\varepsilon_{ijk}} \partial_k \partial_j U\right)$$

$$= \sum_{jk} \tfrac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \underbrace{(\partial_j \partial_k - \partial_k \partial_j)}_{=0} U$$

NM12

<u>Energieerhaltungssatz:</u>

Integriere (11a.4)



$\Big\{$ − Änderung v. U in Richtung v. $d\vec{r}$

$\shortparallel$

(+ Änderung v. T)

$$U(r_1) - U(r_2)$$

$$= \int_1^2 \underbrace{d\vec{r}\cdot\left[-\vec{\nabla}U(\vec{r})\right]}_{-dU} \qquad (1)$$

$$\overset{(11a.4)}{=} \int_1^2 d\vec{r}\cdot\vec{K}(\vec{r}) \qquad (2)$$

$$\overset{(9.4)}{=} A_{1\to 2} \qquad (3)$$

$$\overset{(10.3)}{=} T_2 - T_1 \qquad (4)$$

$$\Longrightarrow \boxed{U_1 + T_1 = U_2 + T_2} \qquad (5)$$

Entlang einer Trajektorie (Bahn) in einem konservativem Kraftfeld bleibt die

---

NM13

Alternative Herleitung:

$$T_2 - T_1 \overset{(10.3)}{=} A_{1\to 2} \overset{(12.3,1)}{=} \int_1^2 d\vec{r}\cdot\left(-\vec{\nabla}U(\vec{r}(t))\right) \qquad (1)$$

$$d\vec{r} = dt\,\vec{v} = dt\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \quad (*)$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \overbrace{dt\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)}^{(*)} \underbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\frac{dU(\vec{r}(t))}{d\vec{r}}}_{\text{Kettenregel}} \qquad (2)$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} dt \, \frac{d}{dt} U(\vec{r}(t)) \qquad (3)$$

$$= -\left[U(\vec{r}(t_2)) - U(\vec{r}(t_1))\right] = U_1 - U_2 \qquad (4)$$

$$\Rightarrow T_2 + U_2 = T_1 + U_1 \quad = (12.5) \checkmark \qquad (5)$$

Energieerhaltung gilt <u>nicht</u> für zeitabhängige Potentiale:

Falls $U = U(\vec{r}(t), t)$, gilt (2) → (3) nicht:

↑ explizite Zeitabhängigkeit,

denn dann: $$\frac{d}{dt}U(\vec{r}(t),t) = \vec{\nabla}U\cdot\dot{\vec{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} \neq 0 \qquad (6)$$

Grund: externes System ist für zeitänderung des Potentials verantwortlich, und kann Energie zuführen oder abziehen.

NMI 24

Bewegungsgl. $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K}$ ist Diff. Gl. 2.

Erhaltungssätze heissen "Integrale der Bewegung", weil sie Diff.-Gl. 1. Ordnung sind

Erhaltungssätze:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + U = E = \text{const} & \text{" 1. Ord} \\ m\dot{\vec{r}} = \vec{p} = \text{const} & \text{" 1. Ord} \\ \vec{r} \times (m\dot{\vec{r}}) = \vec{L} = \text{const} & \text{" 1. Ord} \end{cases}$$

Bespiel einer kons. Kraft: <u>Lorentzkraft</u>

Kraft auf geladenes Teilchem im Magnetfeld:

$$\vec{K}_{\text{Lorentz}} = q\, \dot{\vec{r}} \times \vec{B} \qquad (1)$$

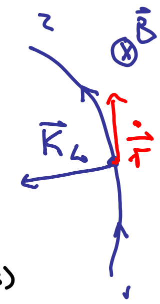
$$T_2 - T_1 = A_{1\to2} = \int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{K} \qquad (2)$$

$$d\vec{r} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (dt\, \dot{\vec{r}}) \cdot q (\dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \qquad (3)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt\; q\; \vec{B} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}) = 0 \qquad (4)$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$
$$= \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$
$$= \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$



Energie ist erhalten, also ist Kraft konservativ.