

Mathematischer Exkurs : Differentialgleichungen (DG)

17.4.08

DG1

Grundverständnis für DG wichtig für Kl. Mechanik (u.v.a. ...)

Bsp. f. gewöhnliche DG:

(1)

Höchste Ableitung: =

(2)

Beachte: Abl. nach nur einer Variablen. Ansonsten wäre es eine

"partielle DG" (mehrere Variablen):

(3)

Gesucht:

Lsg. der DG für best. Anfangsbedingungen.

$$f(x_0) =$$

$$f'(x_0) =$$

$$f^{(n-1)}(x_0) =$$

(4)

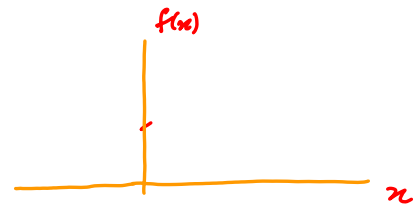
Qualitativ:

DG macht Aussage über Verhältnis einer Funktion zu ihren Ableitungen.

DG2

Beispiel 1:

$$f'(x) = a f(x)$$



⇒ je grösser Funktion, je

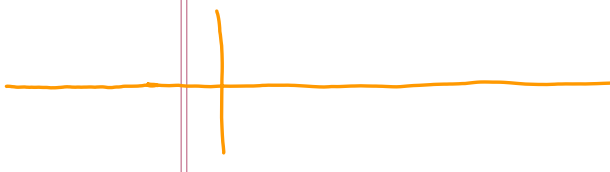
Beispiel 2:

$$f''(x) = -a f(x) \quad (a > 0)$$

(2.-Abl.) =

hat immer

Vorzeichen



Fundamentaler Satz über Lsg:

DG2

Die allg. Lsg. einer DG n-ter Ordnung hängt von unabh. Parametern ab.

Was bedeutet "unabhängige Parameter"?

Beispiel: sei $f(x; c_1, c_2, c_3) = \frac{e^{x(c_1 + c_2)}}{c_1 + c_2} + c_3$ (1)

dann (2)

$\Rightarrow c_1$ und c_2 sind

Allgemein: "unabhängige Parameter" bedeutet:

es existieren keine Funktionen $p_i(c_1, \dots, c_n)$, $i=1, \dots, n-1$ so dass

$f(x; c_1, \dots, c_n) =$ (3)
 $\swarrow$ Lsg. der DG

Unabhängigkeit ist i.d.R. offensichtlich ohne Beweis.

Mit d. allg. Lsg. lassen sich durch geeignete Wahl v. $c_1, \dots, c_n$ beliebige Anfangsbedingungen erfüllen.

DG3

Wichtige Konsequenz: Lösungen möglich durch geniales Raten, denn: "educated guess"

Für einer DG n-ten Ordnung ist eine gerabene Lsg. mit n unabhängigen Parametern "automatisch" die

Beispiel: $f'(x) = a \frac{f(x)}{x}$ (DG mit $n=$) (1)

Lösung: $f(x) =$ (2)

Check: $f'(x) =$ (3)

Systematische Verfahren zur Lösung v. gew. DG

DG4

Für manche Klassen v. gew. DG gibt es systematische Lösungswege.

Trennung der Variablen:

Bsp:
(dasselbe wie 3.1)

$$f'(x) = a \frac{f(x)}{x} \quad (1)$$

(2)

"Trennung":
f nach links, x nach rechts:

(3)

Integriere:

(4)

$\Rightarrow$

DG5

(5)

$\Rightarrow$

(6)

$\Rightarrow$

(7)

(Mehr Beispiele: in der Tutorübung und auf Blatt 1.)

Wichtiger Spezialfall: Lineare DG (linear-Kombination von Ableitungen)

"homogene DG":

$$\left[\begin{array}{l} \text{Notation:} \\ f^{(i)}(x) \equiv \frac{d^i f(x)}{dx^i} \\ \equiv \partial_x^i f(x) \end{array} \right]$$

x-unabhängig

(8)

vorgegebene Funktion

"inhomogene DG":

(9)

DG7

Satz (sehr wichtig): Für homogene lineare DG gilt das Superpositionsprinzip: falls $f_1(x)$ und $f_2(x)$ Lösungen sind, ist auch eine Lsg.

Beweis: (trivial) $\sum_i \gamma_i \partial_x^i (\quad) = 0$ (1)

= (2)

□

Lemma: Für inhomogene lin. DG lässt sich die allgemeine Lösung konstruieren, falls die allg. Lösung der homogenen DG, sowie eine spezielle Lsg. der inhomogenen DG bekannt sind.

Allgemeine Lsg:

DG8 (1)

Beweis: (trivial): $\sum_i \gamma_i \partial_x^i f = \sum_i \gamma_i \partial_x^i + \sum_{i=0}^n \gamma_i \partial_x^i$ (2)

= □

Lösungsansatz für homogene lin. DG: $f(x) =$ (Euler'sche Ansatz) (3)

Eingesetzt in (5.8): $0 = \sum_i \gamma_i \partial_x^i$ (4)

$\Rightarrow$ (3) ist Lsg. falls "Charakteristisches Polynom" "Charakteristische Gl." (5)

Falls Gl.(5) n unterschiedliche Lsg. λ_k ($k=1, \dots, n$) besitzt, ist

die allg. Lsg. von (5.8): $f(x; c_1, \dots, c_n) =$ (6)

(lin. Unabhängigkeit der c_k ist trivial für λ_k alle unterschiedlich)

Bemerkung: Falls einige λ_k gleich sind, ("Entartung"),
ist Sonderbehandlung nötig (hier nicht diskutiert)

DG 9

(1)

Denn:

(2)

Bemerkung: Die Wurzeln λ_L können komplex sein.
Wir suchen aber oft nur reelle Lsg. Diese können als
Real- und Imaginärteil der allg. Lösung (8.6) konstruiert werden.

Verallgemeinerung: System v. (mehreren) DGLungen für (mehrere) Funktionen:

z.B.

$$f_1'(x) = \quad (3)$$

$$f_2'(x) = \quad (4)$$

Wichtig: Eine DG n-ter Ordnung lässt sich als
n DG-ungen 1-ter Ordnung schreiben.

DG 10

Beispiel:

$$f''(x) + a(f'(x))^2 + b f(x) = c x \quad (1)$$

Definiere:

(2)

(3)

(3)':

2 DG 1-ter Ordnung
(4)

(1) :