Mathematischer Exkurs: Differentialgleichungen (DG)

17.4.08 $\boxed{DG1}$

$f' = \frac{df}{dx} = \partial_x f$

Grundverständnis für DG wichtig für kl. Mechanik (u.v.a. ...)

Bsp. f. "gewöhnliche DG": $$f''(x) + a(f'(x))^2 + b f(x) = c x \qquad (1)$$

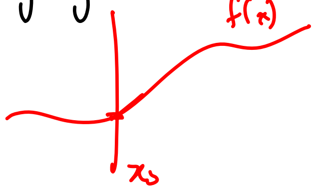
Höchste Ableitung: = "Ordnung" d. DG $(=2 \text{ in Gl. } (1))$ (2)

Beachte: Abl. nach nur einer Variablen. Ansonsten wäre es eine

"partielle DG" (mehrere Variablen): $$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) f(x,y,z) = 0 \qquad (3)$$

Gesucht: Lsg. der DG für best. Anfangsbedingungen.

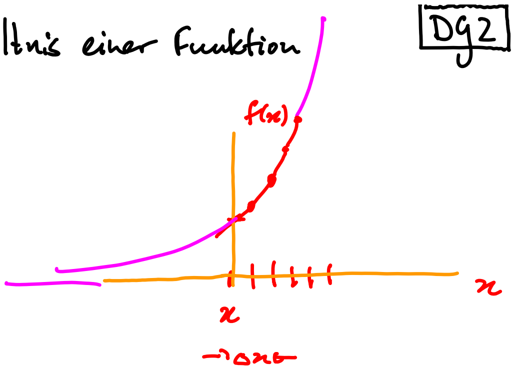
$$f(x_0) = a_0$$
$$f'(x_0) = a_1 \qquad (4)$$
$$f^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$$



$\boxed{DG2}$

Qualitativ: DG macht Aussage über Verhältnis einer Funktion zu ihren Ableitungen.

Beispiel 1: $(a>0)$ $$f'(x) = a f(x)$$



$\Rightarrow$ je grösser Funktion, je größer Ab.
kleiner " " kleiner "

Beispiel 2: $(a>0)$ $$f''(x) = -a f(x) \qquad (a>0)$$

(2. Abl.) = hat immer Vorzeichen

Fundamentaler Satz über Lsg: DG2

Die allg. Lsg. einer DG n-ter Ordnung hängt von $\underline{\underline{n}}$ unabh. Parametern ab.

Was bedeutet "unabhängige Parameter"?

Beispiel: sei $f(x; c_1, c_2, c_3) = \dfrac{e^{x(c_1+c_2)}}{c_1+c_2} + c_3$ (1)

dann $\tilde{f}(x; p_1, p_2) = \dfrac{e^{x p_1}}{p_1} + p_2$, mit $p_1 = c_1 + c_2$, $p_2 = c_3$ (2)

$\Longrightarrow$ c_1 und c_2 sind nicht unabhängig

Allgemein: "unabhängige Parameter" bedeutet:

es existieren keine Funktionen $p_i(c_1, \dots, c_n)$, $i = 1, \dots, n-1$ so dass

$$\underbrace{f(x; \underbrace{c_1, \dots, c_n}_{n})}_{\text{Lsg. der DG}} = \tilde{f}(x; \overbrace{p_1(c_1, \dots, c_n), p_2(c_1, \dots, c_n), \dots, p_{n-1}(\quad)}^{n-1}) \quad (3)$$

Unabhängigkeit ist i.d.R. offensichtlich ohne Beweis.

DG3

Mit d. allg. Lsg. lassen sich durch geeignete Wahl v. $c_1, \dots, c_n$ beliebige Anfangsbedingungen erfüllen.

Wichtige Konsequenz: Lösungen möglich durch geniales Raten, denn: "educated guess"

Für einer DG n-ten Ordnung ist eine geratene Lsg. mit n unabhängigen Parametern "automatisch" die allg. Lösung.

Beispiel: $f'(x) = a \dfrac{f(x)}{x}$ (DG mit $n = 1$) (1)

Lösung: $f(x) = \underset{\text{beliebige Konstante}}{c}\, x^a$ (2)

Check: $f'(x) = c\,a\,x^{a-1} = c\,\dfrac{a x^a}{x} \overset{(2)}{=} a\,\dfrac{f(x)}{x} \overset{\checkmark}{=} (1)$ (3)

Systematische Verfahren zur Lösung v. gew. DG

DG4

Für manche Klassen v. gew. DG gibt es systematische Lösungswege.

Trennung der Variablen:

Bsp: (dasselbe wie 3.1)

$$f'(x) = a\,\frac{f(x)}{x} \qquad (1)$$

$$\frac{df}{dx} = a\,\frac{f}{x} \qquad (2)$$

"Trennung":
f nach links, x nach rechts:

$$\frac{df}{f} = a\,\frac{dx}{x} \qquad (3)$$

Integriere:

$$\int_{f_0}^{f_1} \frac{df}{f} = a \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x} \qquad (4)$$

Trennung der Variablen: Intuitive Erläuterung

NM4a

$$h(x)\,\frac{df}{dx} = F(f(x))\,g(x) = F(f)\,g(x) \qquad (1)$$

Allgemeine Struktur:

Trennung d. Variablen besagt:

$$\boxed{\int_{f_1}^{f_2} \frac{df}{F(f)} = \int_{x_1}^{x_2} dx\,\frac{g(x)}{h(x)}} \qquad (2)$$

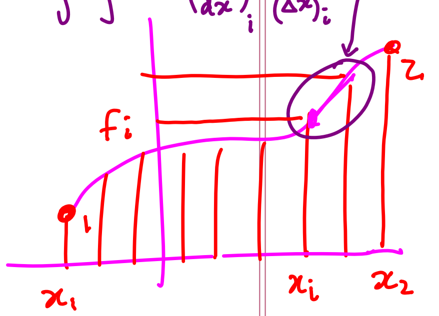
Warum funktioniert das?

Betrachte infinit. Intervall Nr. i:

(1) liefert:

$$h(x_i)\,\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i} = F(f_i)\,g(x_i) \;\Rightarrow\; \frac{\Delta f_i}{F(f_i)} = \sum_i \frac{g(x_i)}{h(x_i)}\,\Delta x_i \qquad (3)$$

Steigung: $\left(\frac{df}{dx}\right)_i = \frac{(\Delta f)_i}{(\Delta x)_i}$



(3) gilt für jedes Intervall. Also auch für deren Summe:

$$\sum_i \frac{\Delta f_i}{F(f_i)} = \sum_i \frac{g(x_i)}{h(x_i)}\,\Delta x_i \qquad (4)$$

(4) ist Riemann'sche Summe für Integral:

$$\Rightarrow \int_{f_1}^{f_2} \frac{df}{F(f)} = \int_{x_1}^{x_2} dx\,\frac{g(x)}{h(x)} \qquad (5)$$

DG5

$$\Rightarrow \quad \ln(f_1/f_0) = a \ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right) = \ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^a \tag{5}$$

$$\Rightarrow \quad f_1/f_0 = \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^a \tag{6}$$

$$f(x) = f_0\left(\frac{x}{x_0}\right)^a$$

Integrationskonstante.

$$\Rightarrow \quad f(x) = x^a \left(f_0\, x_0^{-a}\right) \quad (= 3.2) \tag{7}$$

(Mehr Beispiele: in der Tutorübung und auf Blatt 1.)

Wichtiger Spezialfall: Lineare DG (linear-Kombination von Ableitungen)

z.B.: $\gamma_2 f'' + \gamma_1 f' + \gamma_0 f = 0$

"homogene DG":

$$\sum_{i=0}^{n} \gamma_i \, f^{(i)}(x) = 0 \qquad (n+1 \text{ Terme}) \tag{8}$$

γ_i: x-unabhängig

[Notation: $f^{(i)}_{(x)} \equiv \frac{d^i f(x)}{dx^i} \equiv \partial_x^i f(x)$]

"inhomogene DG":

vorgegebene Funktion

$$\sum_{i=0}^{n} \gamma_i \, f^{(i)}(x) = g(x) \tag{9}$$

DG7

Satz (sehr wichtig): Für <u>homogene</u> lineare DG gilt das Superpositionsprinzip: falls $f_1(x)$ und $f_2(x)$ Lösungen sind, ist $b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x)$ auch eine Lsg.

Beweis:
(trivial)

$$\sum_i \gamma_i \, \partial_x^i (b_1 f_1 + b_2 f_2) = 0 \tag{1}$$

$$= b_1 \underbrace{\sum_i \gamma_i \partial_x^i f_1}_{=0} + b_2 \underbrace{\sum_i \gamma_i \partial_x^i f_2}_{=0} = 0 \checkmark \tag{2}$$

$\square$

<u>Lemma:</u> Für <u>inhomogene</u> lin. DG lässt sich die <u>allgemeine</u> Lösung konstruieren, falls die allg. Lösung der homogenen DG, sowie <u>eine</u> spezielle Lsg. der inhomogenen DG bekannt sind.

Allgemeine Lsg.: $f(x; c_1, \dots, c_n) \overset{\text{def}}{=} f_{inh}(x) + f_{hom}(x; c_1, \dots, c_n)$ (1)

Beweis (trivial):

$$\sum_i \gamma_i \partial_x^i f \overset{(1)}{=} \underbrace{\sum_i \gamma_i \partial_x^i f_{inh}}_{(5.9)} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \gamma_i \partial_x^i f_{hom}}_{(5.8)} \quad (2)$$

$$= g(x) + 0 = \text{R.S. v. } (5.9) \quad \square$$

Lösungsansatz für homogene lin. DG:

$$f(x) = c\, e^{\lambda x} \quad \text{(Euler'sche Ansatz)} \quad (3)$$

Eingesetzt in (5.8):

$$0 = \sum_i \gamma_i \partial_x^i c\, e^{\lambda x} = c \sum_{i=0}^{n} (\gamma_i \lambda^i) e^{\lambda x} \quad (4)$$

$\Rightarrow$ (3) ist Lsg. falls

"Charakteristisches Polynom"

$$\boxed{P(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i \lambda^i = 0} \quad \text{"Charakteristische Gl."} \quad (5)$$

Falls Gl. (5) n unterschiedliche Lsg. λ_k $(k = 1, \dots, n)$ besitzt, ist die allg. Lsg. von (5.8):

$$f(x; c_1, \dots, c_n) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, e^{\lambda_k x} \quad (6)$$

(lin. Unabhängigkeit der c_k ist trivial für λ_k alle unterschiedlich)

Bemerkung: Falls einige λ_k gleich sind, ("Entartung"), ist Sonderbehandlung nötig (hier nicht diskutiert)

z.B. wenn es zwei gleiche λ's gibt: $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \dots$ (1)

Dann:

$$f(x) = \underline{(a + x b)}\, e^{\lambda_1 x} + c_3\, e^{\lambda_3 x} \quad (2)$$

Allg.: $\lambda_1 = \lambda_2, \dots = \lambda_n$ $\quad (a_1 + a_2 x + \dots a_n x^{n-1}) e^{\lambda_1 x} + c_{n+1} e^{\lambda_{n+1} x} \dots$

Bemerkung: Die Wurzeln λ_L können komplex sein.
Wir suchen aber oft nur reelle Lsg. Diese können als Real- und Imaginärteil der allg. Lösung (8.6) konstruiert werden.

<u>Verallgemeinerung</u>: System v. (mehreren) DGleichungen für (mehrere) Funktionen:

z.B.

$$f_1'(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad (3)$$

$$f_2'(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \quad (4)$$

Wichtig: <u>Eine</u> DG n-ter Ordnung lässt sich als n DG-ungen 1-ter Ordnung schreiben.

Beispiel: $$f''(x) + a\left(f'(x)\right)^2 + b\,f(x) = cx \qquad (1)$$

Ordnung 2

Definiere: $$g_2(x) \overset{\text{def}}{:=} f'(x)\,, \quad \Rightarrow \quad g_2'(x) = f''(x) \qquad (2)$$

$$g_1(x) := f(x) \qquad (3)$$

(3)' : $$g_1'(x) = g_2(x)$$

(1) : $$g_2' + a g_2^2 + b g_1 = cx$$

2 DG 1-ter Ordnung (4)