Mathematischer Exkurs: Differentialgleichungen (DG)

17.4.08 $\boxed{DG1}$

$f' = \frac{df}{dx} = \partial_x f$

Grundverständnis für DG wichtig für kl. Mechanik (u.v.a. ...)

Bsp. f. "gewöhnliche DG": $$f''(x) + a(f'(x))^2 + 6 f(x) = cx \quad (1)$$

Höchste Ableitung := "Ordnung" d. DG (2)

Beachte: Abl. nach nur einer Variablen. Ansonsten wäre es eine

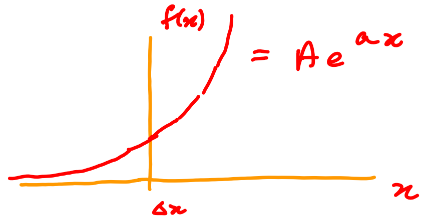
"partielle DG" (mehrere Variablen): $$(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) f(x,y,z) = 0 \quad (3)$$

Gesucht: Lsg. der DG für best. Anfangsbedingungen.

$$\left.\begin{aligned} f(x_0) &= a_0 \\ f'(x_0) &= a_1 \\ f^{(n-1)}(x_0) &= a_{n-1} \end{aligned}\right\} \text{Konstanten} \quad (4)$$

$\boxed{DG2}$

Qualitativ: DG macht Aussage über Verhältnis einer Funktion zu ihren Ableitungen.



$= Ae^{ax}$

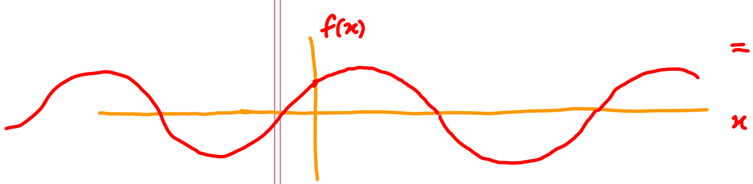
Beispiel 1: $f'(x) = a f(x)$

(a>0)

$\Rightarrow$ je grösser Funktion, je größer Abl.
kleiner kleiner "

Beispiel 2: $f''(x) = -a f(x) \quad (a>0)$

(2. Abl.) = (Krümmung) hat immer anderes Vorzeichen als $f(x)$



$= A\cos ax + B\sin ax$

Fundamentaler Satz über Lsg: $\boxed{DG2}$

Die allg. Lsg. einer DG n-ter Ordnung hängt von $\underline{\underline{n}}$ unabh. Parametern ab.

Was bedeutet "unabhängige Parameter"?

Beispiel: sei $f(x; c_1, c_2, c_3) = \dfrac{e^{x(c_1+c_2)}}{c_1+c_2} + c_3$ (1)

dann $= \tilde{f}(x, p_1, p_2) = \dfrac{e^{x p_1}}{p_1} + p_2$, mit $p_1 = c_1 + c_2$, $p_2 = c_3$ (2)

$\Longrightarrow$ c_1 und c_2 sind <u>nicht</u> unabhängig

Allgemein: "unabhängige Parameter" bedeutet:

es existieren keine Funktionen $p_i(c_1, \dots, c_n)$, $i = 1, \dots, n-1$ so dass

$$f(x; \underbrace{c_1, \dots, c_n}_{n}) = \tilde{f}(x; \underbrace{p_1(c_1, \dots, c_n), p_2(\dots) \dots, p_{n-1}(\dots)}_{n-1 \text{ Konstanten}}) \quad (3)$$

Lsg. der DG

Unabhängigkeit ist i.d.R. offensichtlich ohne Beweis.

Mit d. allg. Lsg. lassen sich durch geeignete Wahl v. $c_1, \dots, c_n$ beliebige Anfangsbedingungen erfüllen. $\boxed{DG3}$

Wichtige Konsequenz: Lösungen möglich durch geniales Raten, denn:

"educated guess"

Für einer DG n-ten Ordnung ist eine geratene Lsg. mit n unabhängigen Parametern "automatisch" die $\underline{\underline{\text{allg. Lösung}}}$!

Beispiel: $f'(x) = a \dfrac{f(x)}{x}$ (DG mit $n = 1$) (1)

Lösung: $f(x) = c\, x^a$ (2)

c: bel. Konst.

Check: $f'(x) = c \cdot a\, x^{a-1} = a \dfrac{c x^a}{x} \overset{(2)}{=} a \dfrac{f(x)}{x} = (1)$ ✓ (3)

Systematische Verfahren zur Lösung v. gew. DG

Für manche Klassen v. gew. DG gibt es systematische Lösungswege.

Trennung der Variablen:

Bsp:
(dasselbe wie 3.1)

$$f'(x) = a\,\frac{f(x)}{x} \qquad (1)$$

$$\frac{df}{dx} = a\,\frac{f}{x} \qquad (2)$$

"Trennung":
f nach links, x nach rechts:

$$\frac{df}{f} = a\,\frac{dx}{x} \qquad (3)$$

Integriere:

$$\int_{f_0}^{f_1} \frac{df}{f} = a \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x} \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{f_1}{f_0}\right) = a \ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right) = \ln\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^a \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f_1}{f_0} = \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^a \qquad (6)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = x^a\,(\underbrace{f_0\, x_0^{-a}}_{\text{Integrationskonst.}}) \qquad (7)$$

(Mehr Beispiele: in der Tutorübung und auf Blatt 1.)

Wichtiger Spezialfall: Lineare DG (linear-Kombination von Ableitungen)

"homogene DG":

$$\sum_{i=0}^{n} \gamma_i\, f^{(i)}(x) = 0 \qquad (n+1 \text{ Terme}) \qquad (8)$$

γ_i, 0: x-unabhängig

[Notation: $f^{(i)}_{(x)} \equiv \frac{d^i f(x)}{dx^i} \equiv \partial_x^i f(x)$]

"inhomogene DG":

$$\sum_{i=0}^{n} \gamma_i\, f^{(i)}(x) = g(x) \qquad (9)$$

$g(x)$: vorgegebene Funktion

DG7

Satz (sehr wichtig): Für <u>homogene</u> lineare DG gilt das Superpositionsprinzip: falls $f_1(x)$ und $f_2(x)$ Lösungen sind, ist $b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x)$ auch eine Lsg.

Beweis: (trivial)

$$\sum_i \gamma_i \partial_x^i (b_1 f_1 + b_2 f_2) = 0 \tag{1}$$

$$= b_1 \underbrace{\sum_i \gamma_i \partial_x^i f_1}_{=0\ (5.8)} + b_2 \underbrace{\sum_i \gamma_i \partial_x^i f_2}_{=0\ (5.8)} = 0 \checkmark \tag{2}$$

$\square$

Lemma: Für inhomogene lin. DG lässt sich die <u>allgemeine</u> Lösung konstruieren, falls die allg. Lösung der <u>homogenen</u> DG, sowie <u>eine</u> spezielle Lsg. der inhomogenen DG bekannt sind.

DG8

Allgemeine Lsg: $f(x; c_1, \ldots c_n) :\overset{def}{=} f_{inh}(x) + f_{hom}(x; c_1, \ldots, c_n)$ (1)

Beweis: (trivial):
einsetzen in (5.9):

$$\sum_i \gamma_i \partial_x^i f = \underbrace{\sum_i \gamma_i \partial_x^i f_{inh}}_{(5.9)} + \underbrace{\sum_{i=0}^n \gamma_i \partial_x^i f_{hom}}_{} \tag{2}$$

$$= g(x) + 0^{(5.8)} = \text{RS v. (5.9)} \checkmark$$

$\square$

Lösungsansatz für homogene lin. DG:

$$f(x) = c\, e^{\lambda x} \quad \text{(Euler'sche Ansatz)} \tag{3}$$

Eingesetzt in (5.8):

$$0 = \sum_i \gamma_i \partial_x^i c\, e^{\lambda x} = c\Big(\sum_i (\gamma_i \lambda^i)\Big) e^{\lambda x} \tag{4}$$

$\Rightarrow$ (3) ist Lsg. falls "Charakteristische Polinom"

$$\boxed{p(\lambda) = \sum_{i=0}^n \gamma_i \lambda^i = 0} \quad \text{"Charakteristische Gl."} \tag{5}$$

'Wurzeln'

Falls Gl. (5) n unterschiedliche Lsg. λ_k $(k = 1, \ldots, n)$ besitzt, ist die allg. Lsg. von (5.8):

$$f(x; c_1, \ldots, c_n) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k x} \tag{6}$$

(lin. Unabhängigkeit der c_k ist trivial für λ_k alle unterschiedlich)

Bemerkung: Falls einige λ_k gleich sind, ("Entartung"), ist Sonderbehandlung nötig (hier nicht diskutiert) **DG9**

z.B.: wenn es zwei gleiche λ's gibt: $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ (1)

Dann: $f(x) = (a+xb)\, e^{\lambda_1 x} + c_3\, e^{\lambda_3 x}$ (2)

Polynom: $(a_1 + a_2 x + \dots a_{p-1} x^{p-1})$ $\quad + \cancel{c_2 e^{\lambda_2 x}}$

Bemerkung: Die Wurzeln λ_L können komplex sein. Wir suchen aber oft nur reelle Lsg. Diese können als Real- und Imaginärteil der allg. Lösung (8.6) konstruiert werden.

Verallgemeinerung: System v. (mehreren) DGleichungen für (mehrere) Funktionen:

z.B.

$$f_1'(x) = f_1(x) + f_2(x) \tag{3}$$
$$f_2'(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \tag{4}$$

DG10

Wichtig: Eine DG n-ter Ordnung lässt sich als System v. n DG-ungen 1-ter Ordnung schreiben.

Beispiel:
Ordnung 2:

$$f''(x) + a\left(f'(x)\right)^2 + b\, f(x) = cx \tag{1}$$

Definiere:

$$g_2(x) \overset{\text{def}}{:=} f'(x) \quad \Rightarrow \quad g_2' = f'' \tag{2}$$

$$g_1(x) := f(x) \tag{3}$$

(3)': $\quad g_1' \overset{(2)}{=} g_2$

(1): $\quad g_2' + a g_2^2 + b g_1 = cx$

$\Big\}$ 2 DG 1-ter Ordnung (4)