

Def: Drehmatrix: R sei eine reelle, orthogonale Matrix, d.h.

transponiert $\rightarrow R^T R = I \quad (\rightarrow R R^T = I) \quad (1) \quad \left[(R^T)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \right]$

Def: "Rotation": $r'_i =$ (2) $\left\{ \begin{matrix} r'_i \\ r'_i \end{matrix} \right\}$ sind Komponenten von $\left\{ \begin{matrix} \bar{r} \\ \bar{r}' \end{matrix} \right\}$

Unter (2) bleiben Längen erhalten!

Beweis: $(r')^2 = \sum_i r'_i r'_i =$ (3)

$$= \sum_{ijk} R_{ik} r_k$$

$$= \dots \quad (4)$$

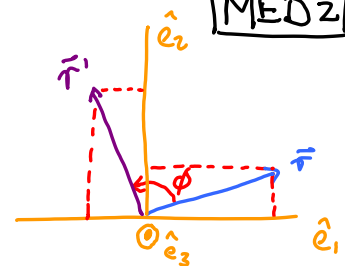
Bem: Da $\bar{r}'^2 = \bar{r}^2$, stellt R eine Drehung dar!

Beispiel in 2 Dim:

$$r'_1 = \cos \phi r_1 - \sin \phi r_2 \quad (1a)$$

$$r'_2 = \sin \phi r_1 + \cos \phi r_2 \quad (1b)$$

$$\begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$



MED 2

In 3 Dimensionen:

"spezielle orthogonale Transf. in 3 Dimensionen"

Def:

$\det R =$: "reine Drehung", $R \in \underline{SO(3)}$

Name für Drehgruppe.

$\det R =$: Drehung + Raumspiegelung

Bemerkung:

Jede $SO(3)$ -Rotation läßt sich durch Hintereinanderausführen von Drehungen um die drei Koordinatenachsen aufbauen:

Drehung um z-Achse
(gegen Uhrzeigersinn):

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MED 3

(1)

Drehung um x-Achse
(gegen Uhrzeigersinn):

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

(2)

Drehung um y-Achse
(gegen Uhrzeigersinn):

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

(3)

Zusätzliches Element für $O(3)$:

Raumspiegelung:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(4)

$SO(3)$ ist damit eine 3-parametrische Gruppe.

MED 4

Einschub: "Gruppenaxiome" : Mitglieder einer "Gruppe" $G = \{g_1, g_2, \dots\}$ haben folgende Eigenschaften:

- 1) Verknüpfungsoperation: Falls g_1 und $g_2 \in G$, dann $g_1 \cdot g_2 \in G$
- 2) Assoziativ: $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$
- 3) Einheitsselement: Es existiert $e \in G$, so daß $e \cdot g = g \quad \forall g \in G$
- 4) Inverse: $\forall g \in G$ existiert $g^{-1} \in G$, so daß $g \cdot g^{-1} = e$.

Rotationen $R \in SO(3)$ erfüllen alle diese Axiome. Bsp:

Sei $R_1, R_2 \in SO(3)$ und $M \equiv R_1 \cdot R_2$, dann