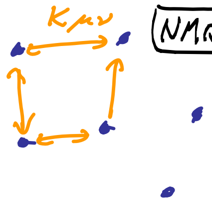
System von Massenpunkten

(Ü3) 22.4.08 NM15



(N2) $$m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu = \vec{K}_\nu \qquad (1) \qquad \nu = 1, \dots, N$$

$$\vec{K}_\nu = \qquad + \sum_{\mu=1,\dots,N}^{\mu \neq \nu} \qquad (2)$$

äußeren Kräfte

von m_μ auf m_ν ausgeübte "innere" Kraft

Def: Schwerpunkt (SP) $$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu \qquad (3)$$

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum_\nu m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu \overset{(2)}{=} \sum_\nu K_\nu^a + \sum_\nu \left(\sum_{\mu \neq \nu} \vec{K}_{\mu\nu} \right) \qquad (4)$$

NM16

denn $$S = \sum_\nu \sum_\mu^{\neq \nu} K_{\mu\nu} = \sum_\mu \sum_\nu^{\mu \neq \nu} K_{\nu\mu} = \sum \sum K = \sum \sum^{\mu \neq \nu} \qquad (1)$$

vertausche Reihenfolge der Summe

$\Rightarrow$ (15.4) $$M \ddot{\vec{R}} = \sum_\nu \vec{K}_\nu^{(a)} = \vec{K} = \text{gesamte äußere Kraft} \qquad (2)$$

SP verhält sich so wie ein Punkteilchen mit Masse M, Ortsvektor R, unter Einfluß äußeren Kraft K, unabhängig von inneren Kräften

Es ist oft sinnvoll, SP so zu wählen dass Schwerpunktsimpuls = 0:
dieses Bezugsystem heißt "SP-System"

NM17

Def: SP-Drehimpuls $\quad \vec L \overset{(8.3)}{=} \sum_\nu \vec r_\nu \times m_\nu \dot{\vec r}_\nu$ (1)

Def: Externes Dreh-Moment $\quad \vec M \overset{(8.4)}{=} \sum_\nu \vec r_\nu \times \vec K_\nu^{(a)}$ (2)

(1) : $\quad \vec L = \quad {}_\nu \quad \vec r_\nu \times m_\nu \dot{\vec r}_\nu$ (3)

$= \sum_\nu \vec r_\nu \times \quad + \quad \sum_\nu \vec r_\nu \times$ (4)

$\overset{(7.2)}{=}$

$$\boxed{\dot{\vec L} = \vec M_{tot}} \quad (5)$$

(wie (9.2) für einzelnen Massenpunkt)

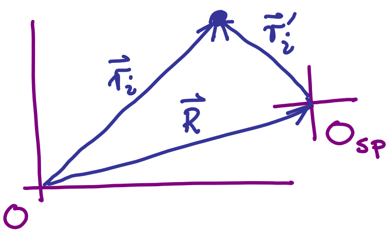
Drehimpulserhaltung: $\quad \vec M_{tot} = 0 \Rightarrow$ (6)

NM18

Transformation ins SP-System

Schreibe $\quad \vec r_\nu = \vec R + \vec r_\nu{}'$ (1)

SP- { Ort / Geschw. } $\quad$ { Ortsvektor / Geschw. } im SP-System



$\frac{d}{dt}$ (1) $\quad \vec v_\nu = \vec V + \vec v'$ (2)

Transformiere ins SP-System: wähle O_{sp} so, dass: (3)

(SP-Koorindate im SP-System = 0)

und (SP ruht im SP- (4)

Gesamtimpuls: $\quad \vec P = \sum_\nu m_\nu \dot{\vec r}_\nu =$ (5)

$=$ (6)

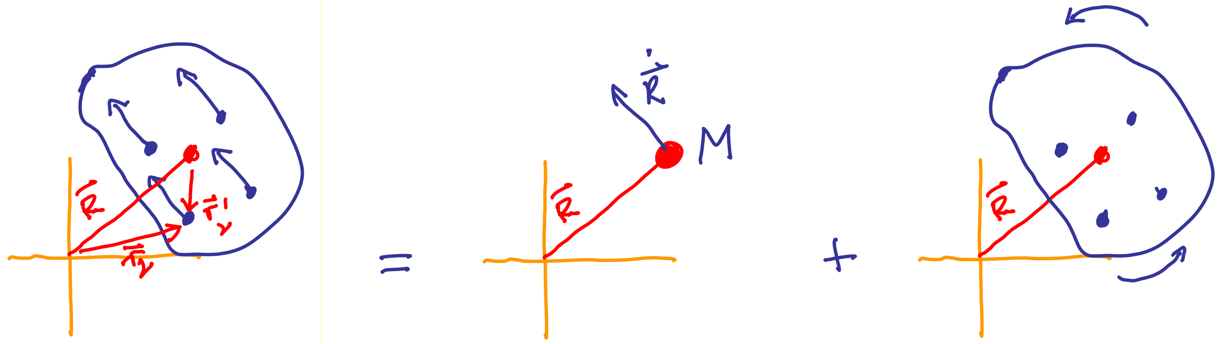
$\Rightarrow$ Gesamtimpuls = Schwerpunktimpuls

Gesamtdrehimpuls: $\vec{L} = \sum_\nu \vec{r}_\nu \times m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu$ (1) $\boxed{NM19}$

$$= \sum_\nu (\overset{①}{\vec{R}} + \overset{②}{\vec{r}_\nu'}) \times m_\nu (\overset{③}{\dot{\vec{R}}} + \overset{④}{\dot{\vec{r}}_\nu'}) \qquad (2)$$

$$= \;^{①②} \qquad + \;^{②③} \qquad + \;^{①④} \qquad + \;^{②④} \qquad (3)$$

Gesamtdrehimpuls um O = Dreimpuls (um O) einer Punktmasse M am SP-Ort R,
+ Derimpuls der Teilchen um den SP O' am SP-Ort R



Erhaltungssätze (zum Ersten) [nach S. Kehrein] 22.4.07 $\boxed{ES1}$

Def: "Abgeschlossenes System": hat keine Wechselwirkung mit Massenpunkten ausserhalb des Systems.

Betrachte abg. S. aus N Massenpunkten, beschrieben durch Pot.

Kraft auf Massenpunkt ν in Richtung $i = 1,2,3$ $= x,y,z$ $\qquad F_\nu =$ (1)

Bsp: Gravitationspot. für N Körper: $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = -G \sum_{\nu<\mu} \frac{m_\nu m_\mu}{|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|}$ (2)

keine Doppelzählung!

= Summe aus "Zweikörperpotentialen"

Satz: Ein abgeschlossenes System sei durch ein Potential $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ beschrieben. Falls V nicht explizit von der Zeit abhängt („V invariant unter Zeitverschiebungen" „Homogenität der Zeit"), ist Gesamtenergie zeitlich konstant.

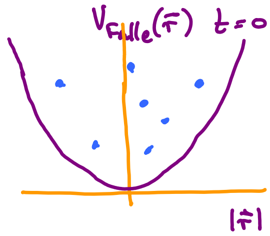
ES2

Bemerkung: „Homogenität der Zeit" bedeutet: keine 'absolute' Zeit ist ausgezeichnet. z.B.: 2 Beobachter in unterschiedl. Inertialsystemen mit verschiedenem Zeitursprung sehen die gleichen Naturgesetze.

[Gegenbeispiel: Atome in optischer Falle,

mit $V = V_{\text{Falle}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \quad) + \sum_{\nu<\mu} V_{int}(\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu)$

$= \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{2} k \quad \vec{r}_\nu^{\,2}$



(Pot. öffnet sich als Fkt. v. t)]

ES3

Beweis:

Gesamtenergie:
$$E \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2} (\dot{\vec{r}}_\nu)^2 + V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \qquad (1)$$

$\partial_t(1)$:
$$\frac{dE}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} \qquad\qquad + \sum_{\nu=1}^{N} \qquad\qquad (2)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \Big(\qquad\qquad \Big) \qquad (3)$$

Satz: Ein abgeschlossenes System sei durch ein Potential $V(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N)$ beschrieben. Falls V invariant unter Verschiebungen um beliebigen Vektor $\vec{a}$ ist, **ES4**

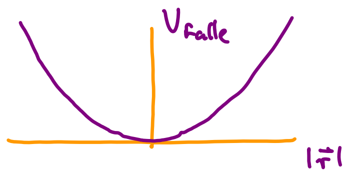
$$V(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N) = \qquad (1)$$

("Homogenität des Raums"), ist Gesamtimpuls zeitlich konstant:

$$\qquad (2)$$

Bemerkung (i): Homogenität des Raums: kein Punkt im Raum ist ausgezeichnet.

Gegenbeispiel: Atome in optischer Falle:



Bemerkung (ii): Bedingung für 2-Teilchen WW, dass Pot. nur von Ortsdifferenzen abhängt, z.B. Grav. Pot.: **ES5**

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \qquad (1)$$

Beweis:

4.1):
$$V(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N) = V(\vec{r}_1 + \vec{a}, ..., \vec{r}_N + \vec{a}) \qquad (2)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \qquad = \qquad \boxed{} \qquad (4)$$

Gesamtimpuls:

Explizit: $\frac{\partial r_i}{\partial r_j} = \delta_{ij}$ $\boxed{ES5a}$

Beweis:

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial x}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial r_j} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{ij}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{wenn } i=j \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

$\boxed{ES6}$

<u>Folgerung</u>: Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems mit Eigenschaft (4.1) bewegt sich gleichförmig, mit Geschw. $\vec{P}/M$, wobei $M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu$ = Gesamtmasse.

<u>Beweis</u>: Schwerpunkt $\vec{R}(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu$ (1)

$\dot{(1)}$

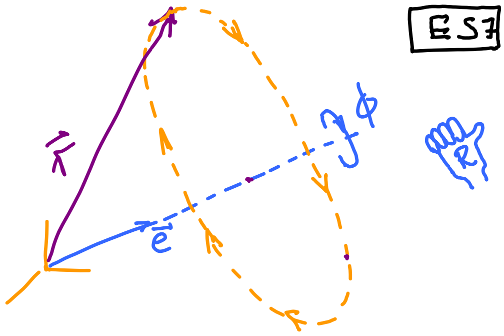
Nächster Schritt: Konsequenz der Isotropie des Raums?

Vorher ...

ES7

Mathematischer Exkurs über Drehungen

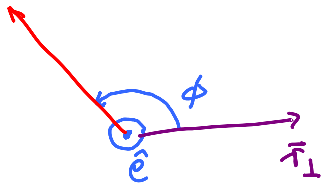
Drehe den Vektor $\vec{r}$ um einen Winkel ϕ (gegenuhrz.) parallel zu einer Achse $\hat{e}$, mit $|\hat{e}| = 1$.
In welchen Vektor $\vec{r}\,'$ geht $\vec{r}$ über?
(Sog. aktive Transf.)



Zerlege $\vec{r}$ bezüglich $\hat{e}$: $\quad \vec{r} = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp \qquad (1)$

Siehe Blatt 1 Beispielaufgabe 1 $\quad = \qquad (2)$

Blick von oben



Schreibe: $\quad \vec{s} = \qquad (3)$

mit $\quad \vec{r}_\perp = \qquad (4)$

Rechte Hand: $\vec{r}_\perp = \vec{s} \times \hat{e}$

$\vec{r}_\perp \equiv$ Daumen
$\vec{s} \equiv$ Zeigefinger
$\hat{e} =$ Mittelfinger

Rotierter Vektor: $\quad \vec{r}\,' = \qquad (5)$

$\vec{r}_\perp\,' = \qquad (6)$

ES8

$$\vec{r}\,' \overset{(1.5),(1.6)}{=} \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp \cos\phi + \vec{s}\sin\phi \qquad (1)$$

$$= \qquad + \qquad \cos\phi + \qquad \sin\phi \qquad (2)$$

Endergebnis für rotierten Vektor:

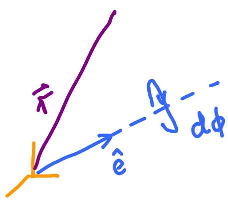
$$\boxed{\vec{r}\,' = \vec{r}\cos\phi + (1-\cos\phi)\,\hat{e}\,(\hat{e}\cdot\vec{r}) + \hat{e}\times\vec{r}\,\sin\phi} \qquad (3)$$

Infinitesimale Drehung um $d\phi$:
$\phi \to 0$:
$\cos\phi \to$
$\sin\phi \to$

$$\vec{r}\,' = \qquad (4)$$

$$d\vec{\omega} \overset{\text{def}}{=} \qquad (5)$$

Dann $\boxed{d\vec{r} \overset{\text{def}}{=} \vec{r}\,' - \vec{r} = } \qquad (6)$



Logisch: für infinitesimale Drehung ist Änderung v. $\vec{r}$ $\perp$ zum Ausgangsvektor $\vec{r}$

Ende math. Exkurs.

ES9

Def: Drehimpuls eines Teilchens bezüglich Ursprung: $\vec{L} \overset{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p}$ (1)

Def: Drehmoment, das auf Teilchen wirkt: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (2)

Satz: Ein abgeschlossenes System sei durch ein Potential $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ beschrieben. Falls V invariant unter Drehungen um den Ursprung ist,

gleiche Transf. (8.2) für alle N Vektoren

$$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \tag{3}$$

("Isotropie des Raumes"), dann ist Gesamtdrehimpuls bezüglich des Ursprungs, $\vec{L} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{p}_\nu$, zeitlich erhalten.

ES10

Bem: Verallg. für Drehung um anderen Punkt ist offensichtlich.

Beweis: Betrachte inf. Drehung $d\phi$ um Einheitsvektor $\hat{e}$:

(8.6) $$\vec{r}\,' = \vec{r} + d\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{r} + \tag{1}$$

(9.3): $$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = V(\vec{r}\,'_1, \dots, \vec{r}\,'_N) \tag{2}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \tag{3}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \tag{4}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \tag{5}$$

$\hat{e}$ ist beliebig $\Rightarrow$ $0 \overset{(5)}{=} \sum_{\nu=1}^{N}$ $\leftarrow$ {Gesamtdrehmoment verschwindet (5)

Folglich: (9.1)

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \times \vec{p}_\nu + \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \dot{\vec{p}}_\nu \qquad (1)$$

$$\overset{(N2)}{=} \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu \overset{(10.5)}{=} 0 \quad \square \qquad (2)$$

ES11

Bemerkung (i): 2-Teilchenpotentiale die nur vom Abstand abhängen (und nicht von ihrer Orientierung relativ zueinander) sind isotrop.

Bsp: Grav. Pot.: $\mathcal{U}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \propto \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ (3)

Def: Eine "Zentralkraft" wirkt immer in Richtung der Verbindungsgerade zweier Massenpunkte.

Folgerung: Für Zentralkräfte gilt Drehimpulserhaltung, denn M =

Drehmoment: $\vec{M} =$ (4)

$= \qquad \Rightarrow \dot{\vec{l}} = 0 \Rightarrow \vec{l} = \text{const.}$

ES12

Bem (ii) Isotrope 2-Teilchenpotentiale führen zu Zentralkräften

Beweis: $V(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)$ hängt nur vom Abstand ab.

$\Rightarrow$ Kraft: $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) =$ (1)

$$\left[\begin{aligned} r &= \left[r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right]^{1/2} \\ \frac{\partial r}{\partial r_1} &= \frac{r_1}{\left[r_1^2+r_2^2+r_3^2\right]^{1/2}} \\ &= \frac{r_1}{r} \end{aligned}\right]$$

$= \qquad = \qquad$ (2)

$\left[\hat{r} = \frac{r_i \hat{e}_i}{r}\right]$

Bem (iii) Es gibt auch (z.B.) isotrope 3-Körperkräfte, die keine Zentralkräfte sind. Auch für diese gilt, wie gezeigt, Drehimpulserhaltung!

Zentrales Thema der modernen Theoretischen Physik:

$\boxed{\text{Symmetrien} \longrightarrow \text{Erhaltungssätze}}$

zur Kenntnisnahme: **ES13**

Falls alle Kräfte konservativ sind, kann gezeigt werden, dass <u>Energie</u> folgende allgemeine Form hat:

$$E = T + U^{(a)} + U^{(i)} \tag{1}$$

Kinetische Energie:

$$T = \sum_\nu \frac{1}{2} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2} , \tag{2}$$

Potential für externe Kräfte:

$$U^{(a)} = \sum_\nu U_\nu^{(a)}(\vec{r}_\nu) , \tag{3}$$

$$\text{mit } \vec{K}_\nu^{(a)} = -\partial_{\vec{r}_\nu} U^{(a)} , \tag{4}$$

Potential für interne Kräfte:

$$U^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu}^{\nu \neq \mu} U_{\nu\mu}(\underbrace{|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|}_{r_{\nu\mu}}) , \tag{5}$$

$$\text{mit } \vec{F}_{\nu\mu}^{(i)} = -\partial_{\vec{r}_{\nu\mu}} U^{(i)} . \tag{6}$$