Mathematischer Exkurs: Dreidimensionale Drehgruppe (21.4.08) MED1

Def: Drehmatrix: R sei eine reelle, orthogonale Matrix, d.h.

transponiert $\longrightarrow$ $R^T R = 1 \quad (\to RR^T = 1)$ (1) $\left[(R^T)_{ij} \overset{def}{=} R_{ji}\right]$

Def: "Rotation": $r_i' = \sum_k R_{ik} r_k$ (2) $\left[\begin{matrix} r_i \\ r_i' \end{matrix}\right\}$ sind Komponenten von $\left\{\begin{matrix} \vec{r} \\ \vec{r}\,' \end{matrix}\right]$

Unter (2) bleiben Längen erhalten!

Beweis:

$$(r')^2 = \sum_i r_i' r_i' = \sum_{ijk} (R_{ij} r_j)(R_{ik} r_k) \tag{3}$$

$$= \sum_{ijk} r_j \underbrace{R^T_{ji} \; R_{ik}}_{=(R^T R)_{jk} = 1_{jk} = \delta_{jk}} r_k$$

$$= \sum_j r_j r_j = r^2 \tag{4}$$

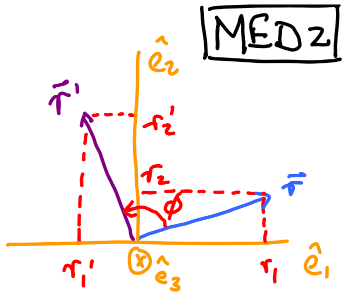
Bem: Da $\vec{r}\,'^2 = \vec{r}^{\,2}$, stellt R eine Drehung dar!

MED2

Beispiel in 2 Dim:

$$r_1' = \cos\phi \, r_1 - \sin\phi \, r_2 \tag{1a}$$

$$r_2' = \sin\phi \, r_1 + \cos\phi \, r_2 \tag{1b}$$



$$\begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}}_{=R} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

In 3 Dimensionen:

"spezielle orthogonale Transf. in 3 Dimensionen"

Def:

$\det R = +1$: "reine Drehung", $R \in SO(3)$

Name für Drehgruppe.

$\det R = -1$: Drehung + Raumspiegelung

Bemerkung: Jede $SO(3)$-Rotation läßt sich durch Hintereinanderausführen von Drehungen um die drei Koordinatenachsen aufbauen:

Drehung um z-Achse (gegen Uhrzeigersinn):

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

MED 3

Drehung um x-Achse (gegen Uhrzeigersinn):

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Drehung um y-Achse (gegen Uhrzeigersinn):

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Zusätzliches Element für O(3):

Raumspiegelung: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (4)

MED 4

SU(3) ist damit eine $\underset{\uparrow (\alpha,\beta,\gamma)}{\text{3-parametrige}}$ Gruppe.

Einschub: "Gruppenaxiome": Mitglieder einer "Gruppe" $G = \{g_1, g_2, \dots\}$ haben folgende Eigenschaften:

1) Verknüpfungsoperation: Falls g_1 und $g_2 \in G$, dann $g_1 \cdot g_2 \in G$

2) Assoziativ: $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$

3) Einheitselement: Es existiert $e \in G$, sodaß $e \cdot g = g \quad \forall g \in G$

4) Inverse: $\forall g \in G$ existiert $g^{-1} \in G$, so dass $g \cdot g^{-1} = e$.

Rotationen $R \in SO(3)$ erfüllen alle diese Axiome. Bsp.:

Sei $R_1, R_2 \in SO(3)$, und $M = R_1 \cdot R_2$, dann

$$M^T M = \underbrace{(R_2^T \underbrace{R_1^T)(R_1}_{=1} R_2)}_{=1} = 1 \implies M \in SO(3)$$

etc.