Invariantes Intervall:

T3 – 7.7.08 | SR25

Falls $(ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = s^2$

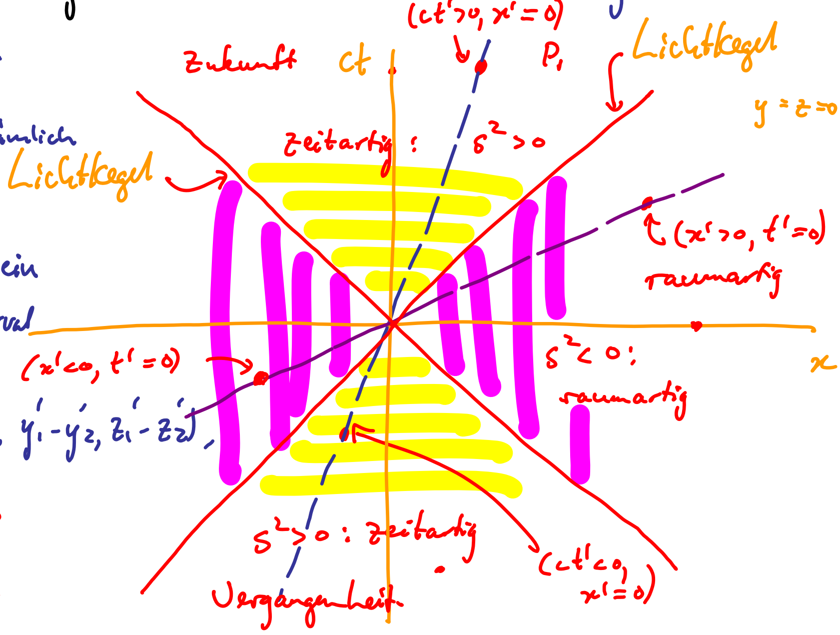
gilt auch $(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \overset{(24.3)}{=} s^2$

Folglich sind sich O und O' einig: $s^2 = 0$ beschreibt Ausbreitung des Lichtpulses

Das Intervall in O zwischen zwei Punkten, (ct_i, x_i, y_i, z_i), $i = 1,2$, nämlich $(ct_1 - ct_2, x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$, ist zeitartig bzw. raumartig, falls ein IS O' besteht, für das das Intervall folgende Form annimmt: $(ct_1' - ct_2', 0, 0, 0)$ bzw. $(0, x_1' - x_2', y_1' - y_2', z_1' - z_2')$.

"zeitartiges" Intervall: $s^2 > 0$

"raumartiges" Intervall: $s^2 < 0$



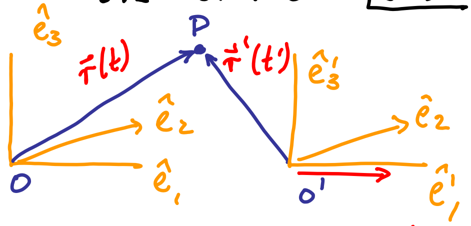
Lorentz-Transformation

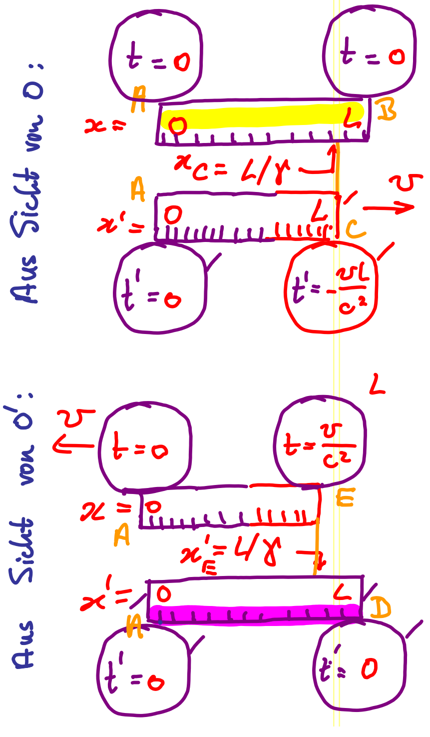
t12 – 16.12.05 | SR30

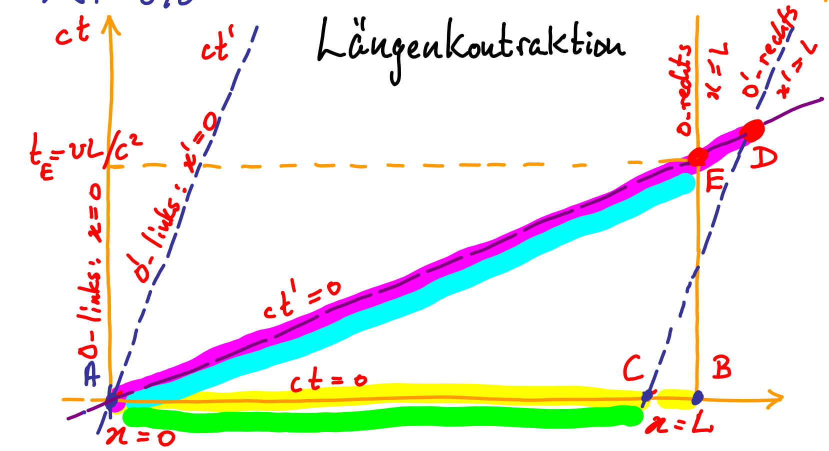
① $ct' = \gamma\left(ct - \frac{vx}{c}\right)$ ①' $ct = \gamma\left(ct' + \frac{vx'}{c}\right)$

② $x' = \gamma(x - vt)$ ②' $x = \gamma(x' + vt')$

$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} > 1$

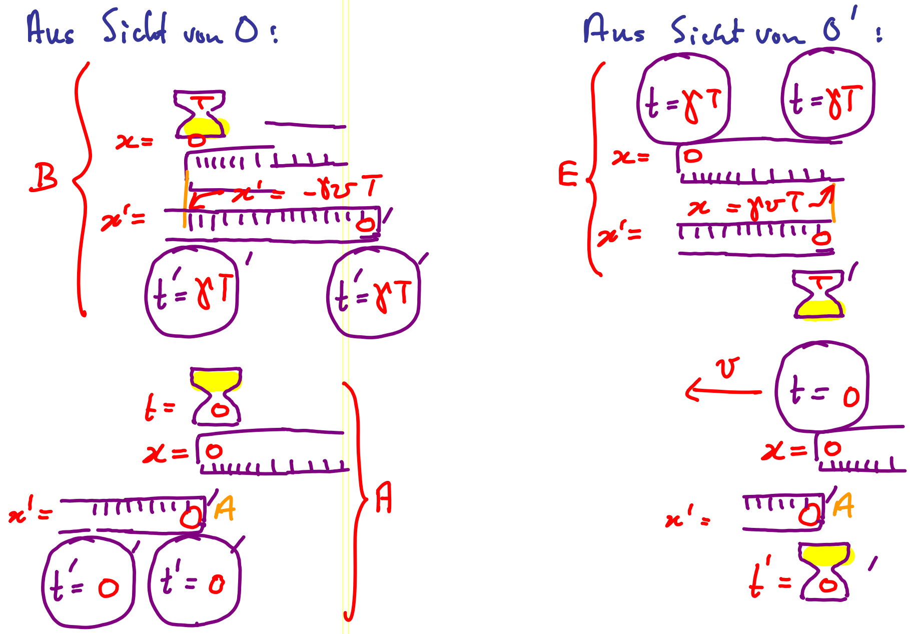


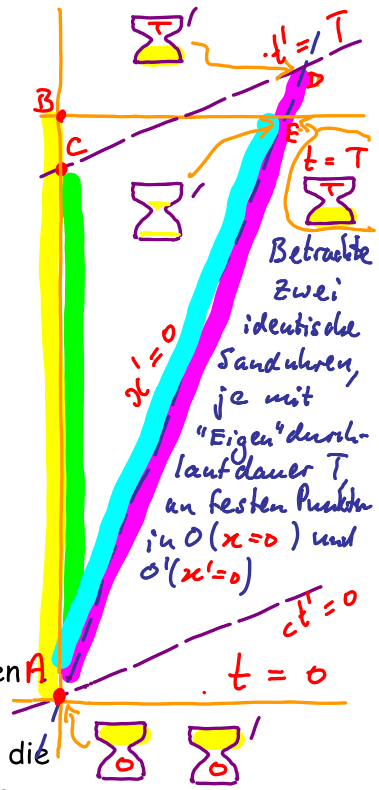




Die Bedeutung der Aussage "ein Maßstab zu einem bestimmten Zeitpunkt" hängt vom Bezugsystem ab; deswegen gelangen die Beobachter O und O', in den Ruhesystemen der jeweiligen beiden Maßstäbe, beide zur Schlussfolgerung, der andere Maßstab sei kürzer.

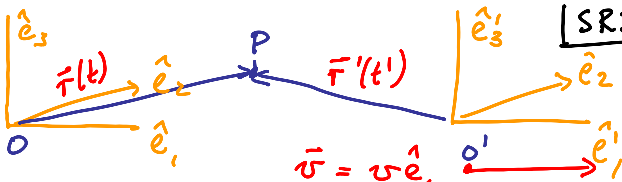
Zeitdilatation:





Die Methode, mit der relativ zueinander bewegte Uhren verglichen werden, hängt davon ob, wie man feststellt, ob zwei räumlich getrennte Ereignisse gleichzeitig stattfinden; deswegen gelangen die Beobachter O und O', im Ruhesystem der jeweiligen beiden Uhren, beide zur Schlussfolgerung, die andere Uhr gehe langsamer.

Relativistische Geschwindigkeitsaddition



①: $t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$ ①': $t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$

②: $x' = \gamma(x - vt)$ ②': $x = \gamma(x' + vt')$

$y' = y$, $z' = z$ $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} > 1$ ③

Geschwindigkeit von P:

laut O: $\vec u = (u_x, u_y, u_z)$, $u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$, $u_z = \frac{dz}{dt}$ (1)

laut O': $\vec u' = (u'_x, u'_y, u'_z)$, $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$, $u'_y = \frac{dy'}{dt'}$, $u'_z = \frac{dz'}{dt'}$ (2)

u'_x ausgedrückt durch u_x, v, c:

Kettenregel

$$u'_x \overset{(2)}{=} \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \gamma\left(\overset{②}{\frac{dx}{dt}} - v\right)\gamma\left(\overset{①'}{1} + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right) \quad (3)$$

$$= \gamma(u_x - v)\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right) \quad (4)$$

Auflösen nach u'_x:

$$u'_x\left[1 - \gamma^2\frac{v}{c^2}(u_x - v)\right] = \gamma^2(u_x - v) \quad (5)$$

$$u'_x = \frac{(u_x - v)}{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2} - \frac{u_x v}{c^2}} \overset{③}{=} \boxed{\frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = u'_x} \quad (6)$$

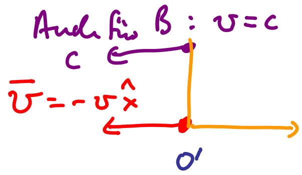
Analog:
(Selber nachrechnen!)

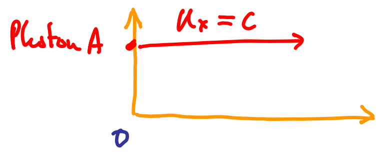
$$\boxed{u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}, \quad (7) \qquad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}} \quad (8)$$

Bemerkungen:

i) u'_x transformiert anders als u'_y, u'_z

ii) Für $u_x/c \ll 1$ oder $v/c \ll 1$, reduzieren (32.6–8) zur Galilei-Form: $u'_x = u_x - v$, $u'_y = u_y$, $u'_z = u_z$





iii) Wichtiger Konsistenzcheck: messen O und O' dieselbe Lichtgeschwindigkeit? Relativgeschw. v. O' bezüglich O: $\vec{v} = -v\hat{x}$

Für $\vec{u} = c\hat{x}$, $u_x = c$ (P = Photon in x-Richtung) liefert (32.6):

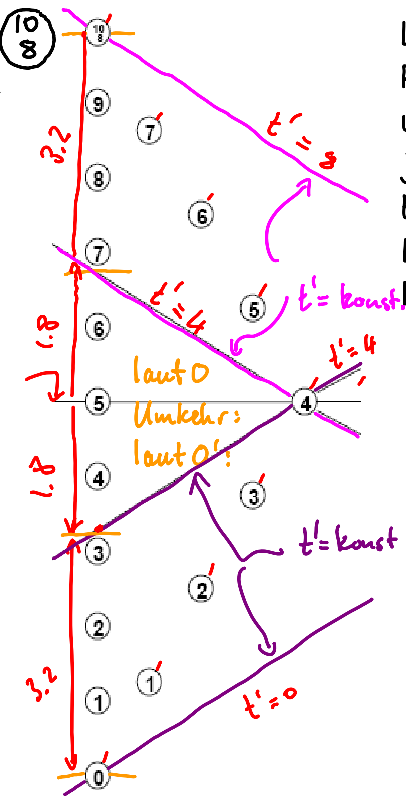
$$u'_x \overset{(32.6)}{=} \frac{c-(-v)}{1-c(-v)/c^2} = \frac{c(1+v/c)}{1+v/c} = c \Rightarrow \vec{u}_x = c\hat{x}$$

Ergebnis ist unabhängig von v! ⇒

Alle IS messen dieselbe Lichtgeschwindigkeit für Photon A, sogar Photon B, das selbst c hat!!

Zwillingsparadoxon: (Mermin, Chapter 10) Zwilling O' fliegt zum Mond und zurück zur Erde. Bei der Rückkehr ist er jünger als sein daheimgebliebener Zwilling O. Warum?

Laut O dauern Hin-und Rückreise jeweils 5 Stunden, und vergehen wärendessen jeweils 4 Stunden auf der Rakete. O' folgert: Bewegte Raketenuhren gehen langsamer!



Laut O' dauern Hin-und Rückreise jeweils 4 Stunden, und vergehen wärendessen jeweils 3.2 Stunden auf der Erde. O' folgert: Bewegte Erdenuhren gehen langsamer!

Bei Rückkehr ist O 10, O' 8 Stunden alt.

$3.2 + 3.2 + 1.8 + 1.8 = 10$

Trotzdem ist bei Rückkehr O 10, O' 8 Stunden alt. Grund: die Umkehr um am Mond (wo O' beschleunigt wird, also kein IS ist), dauert laut O' 0 Stunden, laut O dagegen 3.6 Stunden (laut allg. Relativitätstheorie gehen beschleunigte Uhren langsamer).

Auflösung des Paradoxons:

Umkehr von O' bricht Symmetrie

Was sehen O und O' voneinander? (welche Photonbahnen verbinden sie?)

Jede Uhr blitzt zur vollen Stunde kurz auf, der andere Zwilling sieht diese Lichtblitze.

Laut O: Eigenzeit

In den ersten 8 O-Stunden blitzen O'-Uhren 4 mal, also

$$\frac{1\ O'\text{-Stunde}}{1\ O\text{-Eigenstunde}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

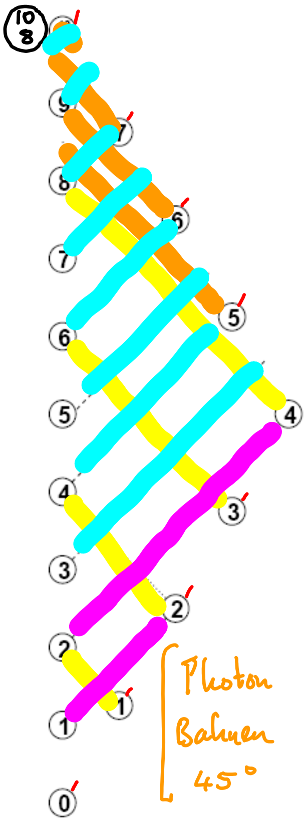
In den letzten 2 O-Stunden blitzen O'-Uhren 4 mal, also

$$\frac{1\ O'\text{-Stunde}}{1\ O\text{-Eigenstunde}} = \frac{4}{2} = 2$$

O berechnet Gesamtreisezeit laut O'-Uhren, in Eigenzeit-Stunden:

$$(8\ O\text{-Eigenstunden}) \times \left(\frac{1}{2}\ \frac{O'\text{-Stunde}}{O\text{-Eigenstunde}}\right) + (2\ O\text{-Eigenstunden}) \times \left(2\ \frac{O'\text{-Stunde}}{O\text{-Eigenstunde}}\right)$$

$$= 8\ O'\text{-Stunden}\ \checkmark$$



Laut O': Eigenzeit

In den ersten 4 O'-Stunden blitzen O-Uhren 2 mal, also:

$$\frac{1\ O\text{-Stunde}}{1\ O'\text{-Eigenstunde}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

In den letzten 4 O'-Stunden blitzen O-Uhren 8 mal, also

$$\frac{1\ O\text{-Stunde}}{1\ O'\text{-Eigenstunde}} = \frac{8}{4} = 2$$

O' berechnet Gesamtreisezeit laut O-Uhren, in Eigenzeit-Stunden:

$$(4\ O'\text{-Eigenstunden}) \times \left(\frac{1}{2}\ \frac{O\text{-Stunde}}{O'\text{-Eigenstunde}}\right)$$

$$(4\ O'\text{-Eigenstunden}) \times \left(2\ \frac{O\text{-Stunde}}{O'\text{-Eigenstunde}}\right)$$

$$= 10\ O\text{-Stunden}$$