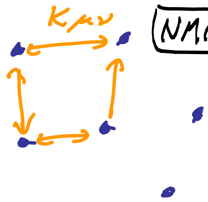
System von Massenpunkten

(V3) 22.4.08 $\boxed{NM15}$



(N2) $$m_\nu \ddot{\vec r}_\nu = \vec K_\nu \qquad (1) \qquad \nu = 1, \dots, N$$

$$\vec K_\nu = \underbrace{\vec K_\nu^{(a)}}_{\text{äußeren Kräfte}} + \sum_{\mu=1,\dots,N}^{\mu\neq\nu} \vec K_{\nu\mu}^{(i)} \qquad (2)$$

äußeren Kräfte

von m_μ auf m_ν ausgeübte "innere" Kraft

Def: Schwerpunkt (SP) $$\vec R = \frac{1}{M} \sum_\nu m_\nu \vec r_\nu \qquad (3)$$

$M = \sum_\nu m_\nu$ = Gesamtmasse

$$M \ddot{\vec R} \overset{(3)}{=} \sum_\nu m_\nu \ddot{\vec r}_\nu \overset{(2)}{=} \sum_\nu \vec K_\nu^{(a)} + \underbrace{\sum_\nu \left(\sum_{\mu\neq\nu} \vec K_{\mu\nu}^{(i)} \right)}_{S} \overset{!}{=} 0 \qquad (4)$$

$\boxed{NM16}$

(N3): $\vec K_{\mu\nu} = -\vec K_{\nu\mu}$

denn

$$S = \sum_\nu \sum_\mu^{\neq\nu} \vec K_{\mu\nu} \underset{\nu\leftrightarrow\mu}{\overset{\text{Umbenennen:}}{=}} \sum_\mu \sum_\nu^{\mu\neq\nu} \vec K_{\nu\mu} = \sum_\nu \sum_\mu^{\mu\neq\nu} \vec K_{\nu\mu} = - \sum_\nu \sum_\mu^{\mu\neq\nu} \vec K_{\mu\nu} \qquad (1)$$

vertausche Reihenfolge der Summe

ν	μ		ν	μ
1	~~1~~			
	2			
	3			
2	1		3	1
	~~2~~			2
	3			~~3~~

$S = -S \Rightarrow S = 0$

$$\Rightarrow (15.4) \qquad M \ddot{\vec R} = \sum_\nu \vec K_\nu^{(a)} = \vec K = \text{gesamte äußere Kraft} \qquad (2)$$

SP verhält sich so wie ein Punkteilchen mit Masse M, Ortsvektor $\vec R$, unter Einfluß äußeren Kraft $\vec K$, unabhängig von inneren Kräften

Es ist oft sinnvoll, SP so zu wählen dass Schwerpunktsimpuls = 0:
dieses Bezugsystem heißt "SP-System"

SP-Impuls: $$\vec P = M \dot{\vec R} = \sum_\nu m_\nu \dot{\vec r}_\nu = \sum_\nu \vec p_\nu$$

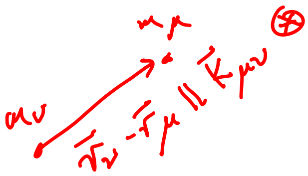
NM17

Def: SP-Drehimpuls $\qquad \vec{L} \overset{(8.3)}{=} \sum_\nu \vec{r}_\nu \times m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \qquad (1)$

Def: Externes Dreh-Moment $\qquad \vec{M} \overset{(8.4)}{=} \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{K}_\nu^{(a)} \qquad (2)$

$\frac{d}{dt}$ (1) : $\qquad \frac{d}{dt}\vec{L} = \underset{\dot{\vec{r}}_\nu \times m \dot{\vec{r}}_\nu}{0} \quad \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \underbrace{m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu}_{\vec{K}_\nu \; (N2)} \qquad (3)$

$$\overset{(15.2)}{=} \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{K}^{(a)} + \underbrace{\sum_\nu \vec{r}_\nu \times \sum_{\mu \neq \nu} \vec{K}_{\nu\mu}^{(i)}}_{} \qquad (4)$$



$$\overset{(17.2)}{=} \vec{M} \qquad \overset{\mu \leftrightarrow \nu}{=} \underbrace{\sum_\mu \sum_{\nu \neq \mu}}_{} \vec{r}_\mu \times \underbrace{\vec{K}_{\mu\nu}^{(i)}}_{\overset{(N3)}{=} -\vec{K}_{\nu\mu}^{(i)}}$$

$$\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{M}_{tot}} \qquad (5) \qquad = -\sum_\nu \sum_{\mu \neq \nu} \vec{r}_\mu \times \vec{K}_{\nu\mu}$$

$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

(wie (9.2) für einzelnen Massenpunkt)

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} (\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu) \times \vec{K}_{\nu\mu}^{(i)} = 0$$

Drehimpulserhaltung: $\qquad \vec{M}_{tot} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{konst.} \qquad (6)$

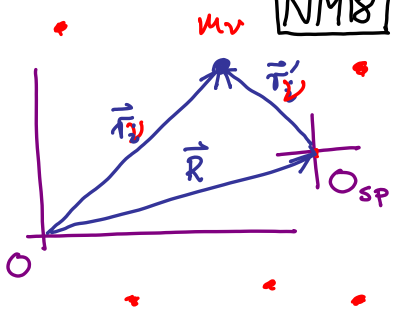
NM18

Transformation ins SP-System

Schreibe $\qquad \vec{r}_\nu = \vec{R} + \vec{r}_\nu{}' \qquad (1)$

SP- {Ort, Geschw.} $\qquad$ {Ortsvektor, Geschw.} im SP-System

$\frac{d}{dt}$ (1) $\qquad \vec{v}_\nu = \underset{= \dot{\vec{R}}}{\vec{V}} + \vec{v}_\nu{}' \qquad (2)$



Transformiere ins SP-System: $\qquad$ wähle O_{sp} so, dass: $\vec{R}' = \frac{1}{M}\sum_\nu m_\nu \vec{r}_\nu{}' = 0 \qquad (3)$

(SP-Koorindate im SP-System = 0)

und $\quad M \dot{\vec{R}}' = \sum_\nu m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu{}' = 0 \qquad$ (SP ruht im SP- $\qquad (4)$

Gesamtimpuls: $\qquad \vec{P} = \sum_\nu m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \overset{(2)}{=} \sum_\nu m_\nu (\dot{\vec{R}} + \underbrace{\dot{\vec{r}}_\nu{}'}_{\overset{(4)}{=}0}) \qquad (5)$

$$= M \dot{\vec{R}} \qquad (6)$$

$\Rightarrow$ Gesamtimpuls = Schwerpunktimpuls

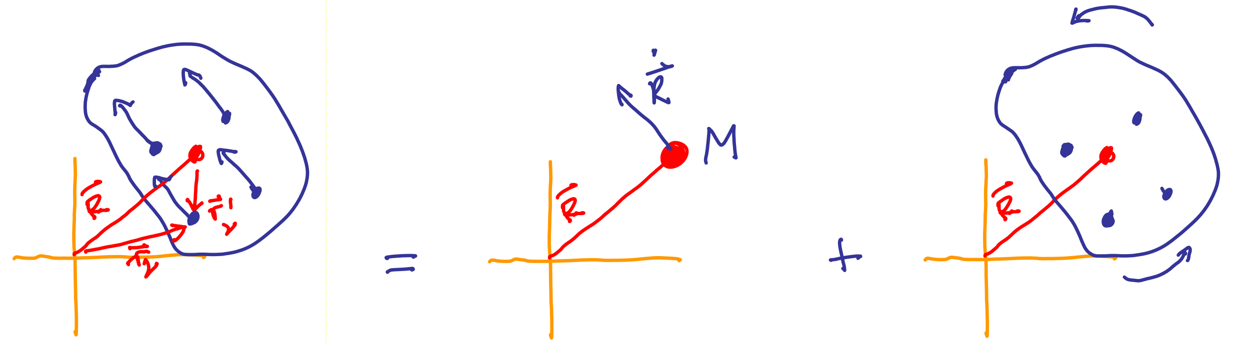
Gesamtdrehimpuls: $\vec{L} = \sum_\nu \underbrace{\vec{r}_\nu}_{(18.1)} \times m_\nu \overset{(18.2)}{\dot{\vec{r}}_\nu}$ (1) $\boxed{\text{NM19}}$

$$= \sum_\nu \left(\overset{1}{\vec{R}} + \overset{2}{\vec{r}_\nu'}\right) \times m_\nu \left(\overset{3}{\dot{\vec{R}}} + \overset{4}{\dot{\vec{r}}_\nu'}\right) \qquad (2)$$

$$= \overset{1\,3}{\vec{R} \times M\dot{\vec{R}}} + \overset{2\,3}{\underset{(18.4)}{0}} + \overset{1\,4}{\underset{(18.3)}{0}} + \overset{2\,4}{\sum_\nu \vec{r}_\nu' \times \vec{p}_\nu'} \qquad (3)$$

Gesamtdrehimpuls um O = Dreimpuls (um O) einer Punktmasse M am SP-Ort R,
+ Derimpuls der Teilchen um den SP O' am SP-Ort R

Steiner'sche Satz!



Erhaltungssätze (zum Ersten) [nach S. Kehrein] 22.4.07 $\boxed{\text{ES1}}$

Def: "Abgeschlossenes System": hat keine Wechselwirkung mit Massenpunkten ausserhalb des Systems.

Betrachte abg. S. aus N Massenpunkten, beschrieben durch Pot. $V(\vec r_1, \dots, \vec r_N)$
$\nu = 1, \dots, N$

Kraft auf Massenpunkt ν in Richtung $i = 1,2,3 = x,y,z$

$$F_{\nu i} = \frac{\partial V}{\partial r_{\nu i}} = \partial_{\nu i} V \qquad (1)$$

$\vec r_\mu = (r_{\mu 1}, r_{\mu 2}, r_{\mu 3}) = (r_{\mu x}, r_{\mu y}, r_{\mu z})$

Bsp: Gravitationspot. für N Körper:

$$V(\vec r_1, \dots, \vec r_N) = -G \overbrace{\sum_{\nu<\mu}}^{\sum_{\mu=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{\mu-1}} \frac{m_\nu m_\mu}{|\vec r_\nu - \vec r_\mu|} \qquad (2)$$

keine Doppelzählung!

$$\left(\sum_{\nu<\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu\neq\mu}\right)$$ doppelsumme

= Summe aus "Zweikörperpotentialen"

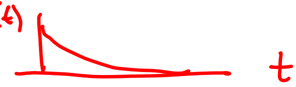
Satz: Ein abgeschlossenes System sei durch ein Potential $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ beschrieben. Falls V nicht explizit von der Zeit abhängt ("V invariant unter Zeitverschiebungen $t \to t + t_0$" "Homogenität der Zeit"), ist Gesamtenergie zeitlich konstant. **ES2**

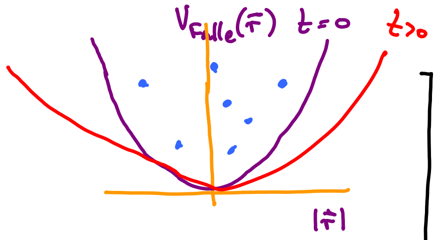
Bemerkung: "Homogenität der Zeit" bedeutet: keine 'absolute' Zeit ist ausgezeichnet. z.B.: 2 Beobachter in unterschiedl. Inertialsystemen mit verschiedenem Zeitursprung sehen die gleichen Naturgesetze.

[Gegenbeispiel: Atome in optischer Falle,

mit $V = V_{\text{Falle}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) + \sum_{\nu < \mu} V_{int}(\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu)$

$= \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{2} k(t)\, \vec{r}_\nu^{\,2}$





(Pot. öffnet sich als Fkt. v. t)]

ES3

Beweis:

$$\vec{r}_\nu(t) = \{r_{\nu_i}(t)\}$$

Gesamtenergie:
$$E \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2} (\dot{\vec{r}}_\nu)^2 + V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \tag{1}$$

$\partial_t(1)$:
$$\frac{dE}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \ddot{\vec{r}}_\nu + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{N} \sum_{i=1}^{3} \overbrace{\frac{\partial V}{\partial r_{\nu_i}}}^{(\vec{\nabla}_\nu V)_i} \overbrace{\frac{d r_{\nu i}}{dt}}^{(\dot{\vec{r}}_\nu)_i}}_{\underbrace{\vec{\nabla}_\nu V}_{-\vec{F}_\nu} \cdot \dot{\vec{r}}_\nu} \tag{2}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \left(m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu - \vec{F}_\nu \right) \overset{(N2)}{=} 0 \quad ✓ \tag{3}$$

$\Longrightarrow$ E = zeitlich konstant.

[Falls $V = V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$, würde Gl.(2) rechts weiteren Beitrag $\frac{\partial V}{\partial t}$ enthalten.]

Satz: Ein abgeschlossenes System sei durch ein Potential $V(\vec r_1, \dots, \vec r_N)$ beschrieben. Falls V invariant unter Verschiebungen um beliebigen Vektor $\vec a$ ist, $\vec r_\nu \to \vec r_\nu + \vec a$

ES4

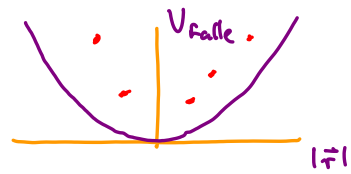
$$V(\vec r_1, \dots, \vec r_N) = V(\vec r_1 + \vec a, \dots, \vec r_N + \vec a) \qquad (1)$$

("Homogenität des Raums"), ist Gesamtimpuls zeitlich konstant:

$$\vec P_{tot} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec p_\nu = \text{konst.} \qquad (2)$$

Bemerkung (i): Homogenität des Raums: kein Punkt im Raum ist ausgezeichnet.

Gegenbeispiel: Atome in optischer Falle:



Bemerkung (ii): Bedingung für 2-Teilchen WW, dass Pot. nur von Ortsdifferenzen abhängt, z.B. Grav. Pot.:

ES5

$$V(\vec r_1, \vec r_2) = V(\vec r_1 - \vec r_2) = V(\vec r_1 + \cancel{\vec a} - (\vec r_2 + \cancel{\vec a})) \qquad (1)$$

Beweis:

∂_{a_i} (4.1):

$$0 = \partial_{a_i} V(\vec r_1, \dots, \vec r_N) = \partial_{a_i} V(\vec r_1 + \vec a, \dots, \vec r_N + \vec a) \qquad (2)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \underbrace{\sum_i \frac{\partial V}{\partial r_{\nu i}}}_{-F_{\nu i}} \underbrace{\frac{\partial (r_{\nu i} + a_i)}{\partial a_i}}_{=1} \qquad (3)$$

$0 = \sum_\nu F_{\nu i}$ gilt für $i = 1,2,3$

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{\nu=1}^{N} \vec F_\nu = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_{\nu=1}^{N} \vec p_\nu}_{\text{Gesamtimpuls: } \vec P_{tot}} \qquad \boxed{\vec P_{tot} = \text{konst.}} \qquad (4)$$

Explizit: $\frac{\partial r_i}{\partial r_j} = \delta_{ij}$ $\boxed{\text{ES5a}}$

Beweis:

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial x}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial r_j} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{ij}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

$\boxed{\text{ES6}}$

<u>Folgerung</u>: Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems mit Eigenschaft (4.1) bewegt sich gleichförmig, mit Geschw. $\vec{P}/M$, wobei $M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu$ = Gesamtmasse.

<u>Beweis</u>: Schwerpunkt $\vec{R}(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu$ (1)

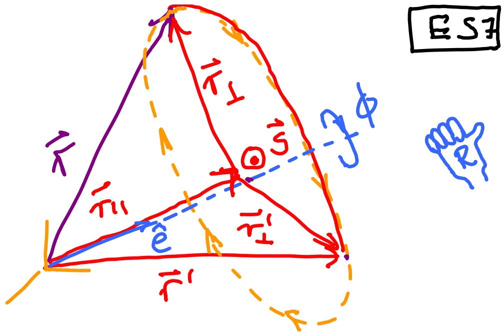
$\dot{(1)}$ $\dot{\vec{R}} = \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu = \frac{\vec{P}_{tot}}{M} = \text{konst.}$

Nächster Schritt: Konsequenz der Isotropie des Raums?

Vorher ...

Mathematischer Exkurs über Drehungen

ES7



Drehe den Vektor $\vec{r}$ um einen Winkel ϕ (gegenuhrz.) parallel zu einer Achse $\hat{e}$, mit $|\hat{e}| = 1$.
In welchen Vektor $\vec{r}\,'$ geht $\vec{r}$ über?
(Sog. aktive Transf.)

Zerlege $\vec{r}$ bezüglich $\hat{e}$:
$$\vec{r} = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp \qquad (1)$$

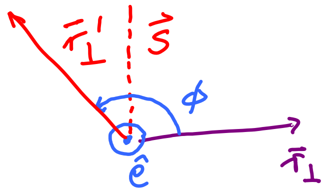
Siehe Blatt 1 Beispielaufgabe 1
$$= \hat{e}(\hat{e}\cdot\vec{r}) + \underbrace{(\hat{e}\times\vec{r})}_{=\vec{s}}\times\hat{e} \qquad (2)$$

Schreibe:
$$\vec{s} = \hat{e}\times\vec{r} \qquad (3)$$

mit
$$\vec{r}_\perp = \vec{s}\times\hat{e} \qquad (4)$$

Rotierter Vektor:
$$\vec{r}\,' = \vec{r}_\parallel + \vec{r}\,'_\perp \qquad (5)$$
$$\vec{r}\,'_\perp = \vec{r}_\perp\cos\phi + \vec{s}\sin\phi \qquad (6)$$

Blick von oben



Rechte Hand: $\vec{r}_\perp = \vec{s}\times\hat{e}$

$\vec{r}_\perp \equiv$ Daumen
$\vec{s} \equiv$ Zeigefinger
$\hat{e} =$ Mittelfinger

ES8

$$\vec{r}\,' \overset{(1.5),(1.6)}{=} \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp\cos\phi + \vec{s}\sin\phi \qquad (1)$$

$$\overset{(7.1a)}{=} \hat{e}(\hat{e}\cdot\vec{r}) + \overset{(7.4)}{\underbrace{\vec{s}\times\hat{e}}}\cos\phi + \overset{(7.3)}{\hat{e}\times\vec{r}}\sin\phi \qquad (2)$$
$$\overset{(7.2)}{=} \vec{r} - \hat{e}(\hat{e}\cdot\vec{r})$$

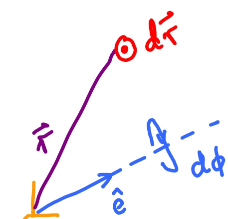
Endergebnis für rotierten Vektor:
$$\boxed{\vec{r}\,' = \vec{r}\cos\phi + (1-\cos\phi)\,\hat{e}(\hat{e}\cdot\vec{r}) + \hat{e}\times\vec{r}\sin\phi} \qquad (3)$$

Infinitesimale Drehung um $d\phi$:
$\phi = d\phi \to 0$
$\cos\phi \to 1 - \frac{1}{2}(d\phi)^2 + \dots$
$\sin\phi \to (d\phi) + \dots$

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \underbrace{d\phi\,\hat{e}}_{=d\vec{\omega}}\times\vec{r} \qquad (4)$$

$$d\vec{\omega} \overset{\text{def}}{=} d\phi\,\hat{e} \qquad (5)$$

Dann
$$\boxed{d\vec{r} \overset{\text{def}}{=} \vec{r}\,' - \vec{r} \overset{(4)}{=} d\vec{\omega}\times\vec{r}} \qquad (6)$$



Logisch: für infinitesimale Drehung ist Änderung v. $\vec{r}$ senkrecht zum Ausgangsvektor $\vec{r}$

Ende math. Exkurs.

Def: Drehimpuls eines Teilchens bezüglich Ursprung: $\vec{L} \overset{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p}$ ES9 (1)

Def: Drehmoment, das auf Teilchen wirkt: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (2)

Satz: Ein abgeschlossenes System sei durch ein Potential $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ beschrieben. Falls V invariant unter Drehungen um den Ursprung ist, $\vec{r}_\nu \to \vec{r}_\nu + d\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu'$

gleiche Transf. (8.2) für alle N Vektoren

$$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = V(\vec{r}_1', \dots, \vec{r}_N') \quad (3)$$

("Isotropie des Raumes"), dann ist Gesamtdrehimpuls bezüglich des Ursprungs, $\vec{L} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{p}_\nu$, zeitlich erhalten.

Bem: Verallg. für Drehung um anderen Punkt ist offensichtlich. ES10

Beweis: Betrachte inf. Drehung $d\phi$ um Einheitsvektor $\hat{e}$:

(8.6) $$\vec{r}_\nu' = \vec{r}_\nu + d\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu + d\phi\, \hat{e} \times \vec{r}_\nu \quad (1)$$

$\frac{d}{d\phi}$ (9.3): $$0 = \frac{d}{d\phi} V(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N) = \left[\frac{d}{d\phi} V(\vec{r}_1', \dots \vec{r}_N')\right]_{d\phi=0} \quad (2)$$

gilt für alle ϕ, also auch für $d\phi \to 0$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \left[\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_\nu'} \frac{\partial \vec{r}_\nu'}{d\phi}\right]_{d\phi=0} \quad (3)$$

$$\left[\frac{\partial V(\vec{r}_1', \dots, \vec{r}_N')}{\partial \vec{r}_\nu'}\right]_{d\phi=0} = \frac{\partial V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)}{\partial \vec{r}_N}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \underbrace{\vec{\nabla}_\nu V}_{-\vec{F}_\nu} \cdot (\hat{e} \times \vec{r}_\nu) \quad (4)$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{N} \hat{e} \cdot (\vec{r}_\nu \times \vec{F}) \quad (5)$$

$\hat{e}$ ist beliebig $\Rightarrow$ $$0 \overset{(5)}{=} \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu = \vec{M}_{tot} \quad (5)$$

$\leftarrow$ {Gesamtdrehmoment verschwindet

ES11

Folglich: (9.1)

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_\nu \underbrace{\dot{\vec{r}}_\nu \times \vec{p}_\nu}_{\dot{\vec{r}}_\nu + m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu = 0} + \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \underbrace{\dot{\vec{p}}_\nu}_{\vec{F}_\nu} \quad (1)$$

$$\overset{(N2)}{=} \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu \overset{(0.5)}{=} 0 \quad \square \quad (2)$$

Bemerkung (i): 2-Teilchenpotentiale die nur vom Abstand abhängen (und nicht von ihrer Orientierung relativ zueinander) sind isotrop.

Bsp: Grav. Pot: $\mathcal{U}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \propto \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ (3)

Def: Eine "Zentralkraft" wirkt immer in Richtung der Verbindungsgerade zweier Massenpunkte. $\vec{F}_{\mu\nu} \parallel \vec{r}_\mu - \vec{r}_\nu$

Folgerung: Für Zentralkräfte gilt Drehimpulserhaltung, denn $M_{tot} = 0$:

Gesamt-Drehmoment v. Teilchen ν und μ

$$\vec{M} = \vec{r}_\nu \times \vec{F}_{\nu\mu} + \vec{r}_\mu \times \vec{F}_{\mu\nu} \quad (4)$$

$$= (\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu) \times \vec{F}_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{l}} = 0 \Rightarrow \vec{l} = \text{const.}$$

ES12

Bem (ii) Isotrope 2-Teilchenpotentiale führen zu Zentralkräften

Beweis: $V(\vec{r}) = f(\underbrace{|\vec{r}|}_{r})$ hängt nur vom Abstand ab.

$\Rightarrow$ Kraft:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial r_i} \hat{e}_i \quad (1)$$

$$\left[r = [r_1^2 + r_2^2 + r_3^2]^{1/2}, \quad \frac{\partial r}{\partial r_1} = \frac{r_1}{[r_1^2 + r_2^2 + r_3^2]^{1/2}} = \frac{r_1}{r} \right]$$

$$= -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial r_i}}_{r_i/r} \hat{e}_i = -\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} \quad (2)$$

$$\left[\hat{r} = \frac{r_i \hat{e}_i}{r} \right]$$

Bem (iii) Es gibt auch (z.B.) isotrope 3-Körperkräfte, die keine Zentralkräfte sind. Auch für diese gilt, wie gezeigt, Drehimpulserhaltung!

Zentrales Thema der modernen Theoretischen Physik:

$$\boxed{\text{Symmetrien} \longrightarrow \text{Erhaltungssätze}}$$

zur Kenntnisnahme:

Falls alle Kräfte konservativ sind, kann gezeigt werden, dass

<u>Energie</u> folgende allgemeine Form hat:

$$E = T + U^{(a)} + U^{(i)} \qquad (1)$$

Kinetische Energie:

$$T = \sum_\nu \frac{1}{2} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2} , \qquad (2)$$

Potential für externe Kräfte:

$$U^{(a)} = \sum_\nu U_\nu^{(a)}(\vec{r}_\nu) , \qquad (3)$$

$$\text{mit } \vec{K}_\nu^{(a)} = -\partial_{\vec{r}_\nu} U^{(a)} , \qquad (4)$$

Potential für interne Kräfte:

$$U^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu}^{\nu \neq \mu} U_{\nu\mu}(\underbrace{|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|}_{r_{\nu\mu}}) , \qquad (5)$$

$$\text{mit } \vec{F}_{\nu\mu}^{(i)} = -\partial_{\vec{r}_{\nu\mu}} U^{(i)} . \qquad (6)$$