

Invariantes Intervall:

13 - 7.7.08

SR25

Falls $(ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = S^2$

gilt auch $(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = S^2$ (2.3)

Folglich sind sich O und O' einig: $S^2 = 0$ beschreibt Ausbreitung des Lichtpulses

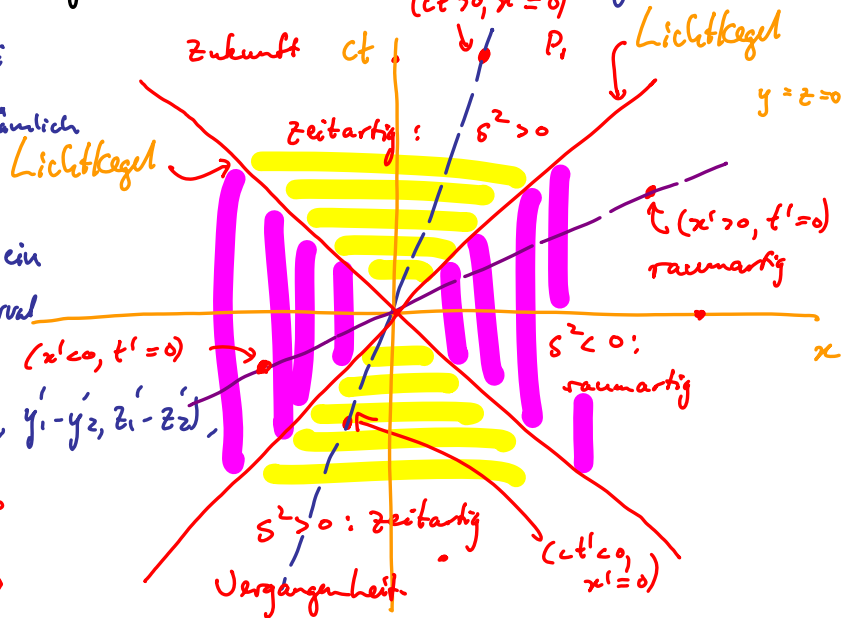
Das Intervall in O zwischen zwei Punkten, (ct_i, x_i, y_i, z_i) , $i=1,2$, nämlich $(ct_1 - ct_2, x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$,

ist zeitartig bzw. raumartig, falls ein IS O' besteht, für das das Intervall folgende Form annimmt:

$(ct'_1 - ct'_2, 0, 0, 0)$ bzw. $(0, x'_1 - x'_2, y'_1 - y'_2, z'_1 - z'_2)$

"zeitartiges" Intervall: $S^2 > 0$

"raumartiges" Intervall: $S^2 < 0$



Lorentz-Transformation

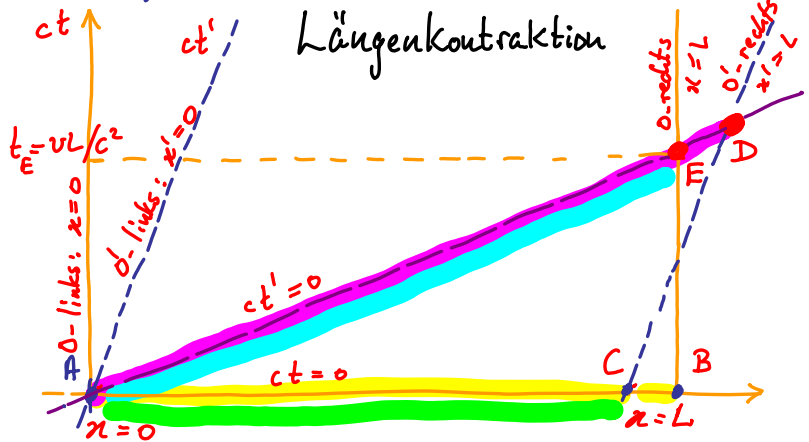
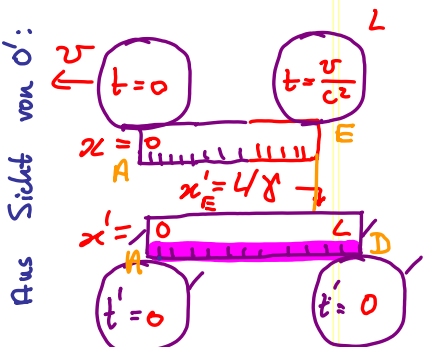
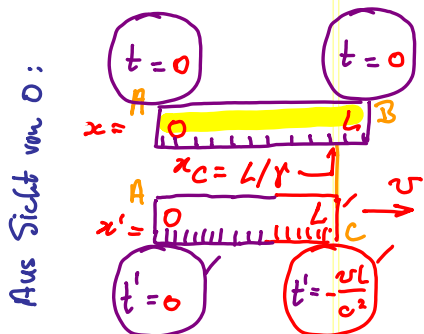
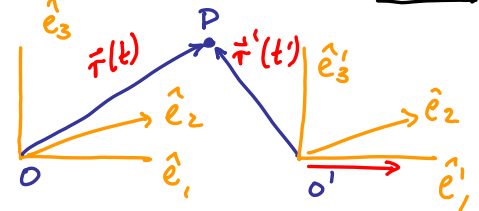
①: $ct' = \gamma(ct - \frac{v}{c}x)$ ①': $ct = \gamma(ct' + \frac{v}{c}x')$

②: $x' = \gamma(x - vt)$ ②': $x = \gamma(x' + vt')$

$\gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2/c^2} > 1$

12 - 16.12.05

SR30

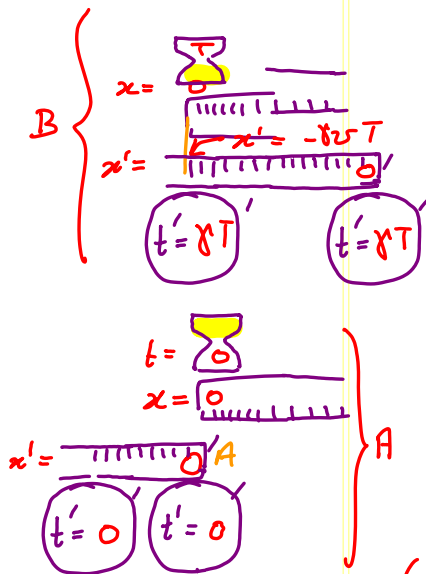


Die Bedeutung der Aussage "ein Maßstab zu einem bestimmten Zeitpunkt" hängt vom Bezugssystem ab; deswegen gelangen die Beobachter O und O' , in den Ruhesystemen der jeweiligen beiden Maßstäbe, beide zur Schlussfolgerung, der andere Maßstab sei kürzer.

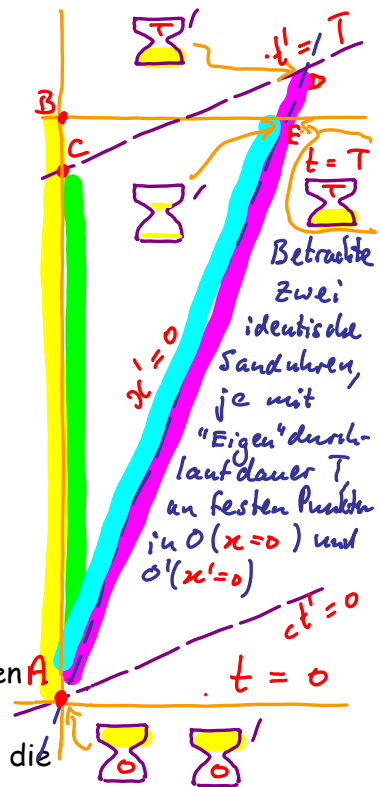
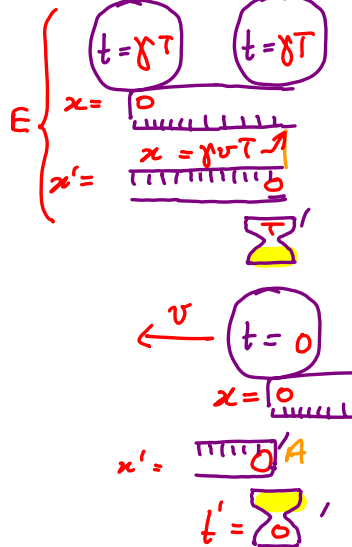
Zeitdilatation:

SR31

Aus Sicht von O:



Aus Sicht von O':

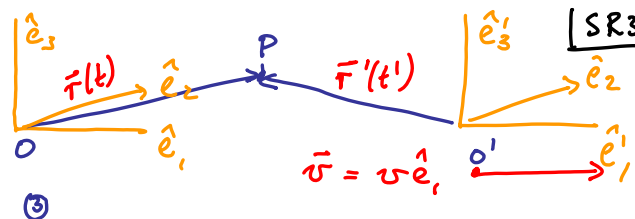


Die Methode, mit der relativ zueinander bewegte Uhren verglichen werden, hängt davon ab, wie man feststellt, ob zwei räumlich getrennte Ereignisse gleichzeitig stattfinden; deswegen gelangen die Beobachter O und O', im Ruhesystem der jeweiligen beiden Uhren, beide zur Schlussfolgerung, die andere Uhr gehe langsamer.

Relativistische Geschwindigkeitsaddition

SR32

$$\begin{aligned} \textcircled{1}: t' &= \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) & \textcircled{1}': t &= \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \\ \textcircled{2}: x' &= \gamma (x - vt) & \textcircled{2}': x &= \gamma (x' + vt') \\ \gamma &= \gamma, z' = z & \gamma &= 1 / \sqrt{1 - v^2/c^2} > 1 \end{aligned}$$



Geschwindigkeit von P:

laut O:

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z), \quad u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt} \quad (1)$$

laut O':

$$\vec{u}' = (u'_x, u'_y, u'_z), \quad u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'} \quad (2)$$

u'_x ausgedrückt durch u_x, v, c :

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \gamma \left(\frac{dx}{dt} - v \right) \gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right) \quad (3)$$

$$= \gamma (u_x - v) \gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} u_x \right) \quad (4)$$

Auflösen nach u'_x :

$$u'_x \left[1 - \gamma^2 \frac{v}{c^2} (u_x - v) \right] = \gamma^2 (u_x - v) \quad (5)$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - v^2/c^2$$

$$u'_x = \frac{(u_x - v)}{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2} - \frac{u_x v}{c^2}} \quad (6) \quad \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = u'_x$$

Analog:
(Selber nachrechnen!)

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma (1 - u_x v / c^2)}, \quad (7) \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma (1 - u_x v / c^2)} \quad (8)$$

Bemerkungen:

SR33

i) u'_x transformiert anders als u'_y, u'_z

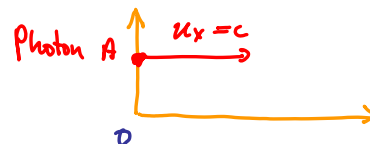
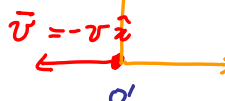
ii) Für $u_x/c \ll 1$ oder $v/c \ll 1$,
reduzieren (32.6-8) zur Galilei-Form: $u'_x = u_x - v$, $u'_y = u_y$, $u'_z = u_z$

iii) Wichtiger Konsistenzcheck:

messen O und O' dieselbe

Lichtgeschwindigkeit? Relativgeschw. v. O' bezüglich O: $\vec{v} = -v \hat{x}$

Für Photon B: $v=c$



Für $\vec{u} = c \hat{x}$, $u_x = c$ (P = Photon in x-Richtung) liefert (32.6):

$$u'_x \stackrel{(32.6)}{=} \frac{c + v}{1 + vc/c^2} = \frac{c(1 + v/c)}{1 + v/c} = c \Rightarrow u'_x = c \hat{x}$$

Ergebnis ist unabhängig von v ! $\Rightarrow$

Alle IS messen dieselbe Lichtgeschwindigkeit für Photon A, sogar Photon B, das selbst c hat!!

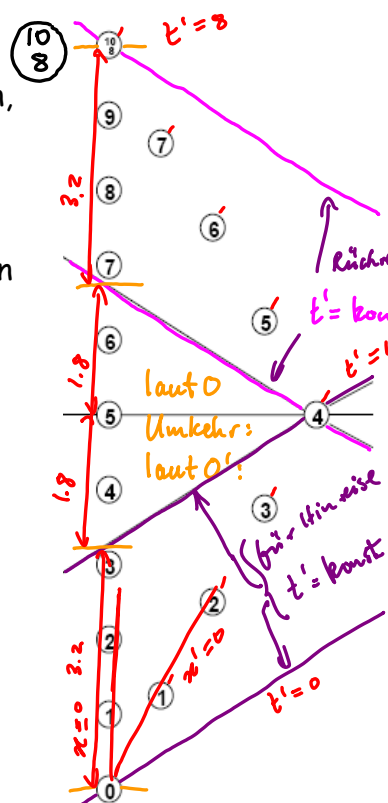
Zwillingsparadoxon: (Mermin, Chapter 10) Zwilling O' fliegt zum Mond und zurück SR34
zur Erde. Bei der Rückkehr ist er jünger als sein daheimgebliebener Zwilling O. Warum?

Laut O dauern Hin- und Rückreise jeweils **5** Stunden, und vergehen währenddessen jeweils **4** Stunden auf der Rakete. O' folgert: Bewegte Raketenuhren gehen langsamer!

Bei Rückkehr ist O **10**, O' **8** Stunden alt.

Auflösung des Paradoxons:

Umkehr von O' bricht Symmetrie



Laut O' dauern Hin- und Rückreise jeweils **4** Stunden, und vergehen währenddessen jeweils **3.2** Stunden auf der Erde. O' folgert: Bewegte Erdenuhren gehen langsamer!

Trotzdem ist bei Rückkehr O **10**, O' **8** Stunden alt. Grund: die Umkehr um am Mond (wo O' beschleunigt wird, also kein TS ist), dauert laut O' **0** Stunden, laut O dagegen **2.6** Stunden (laut allg. Relativitätstheorie gehen beschleunigte Uhren langsamer).

Was sehen O und O' voneinander? (welche Photonbahnen verbinden sie?)

SR35

Jede Uhr blitzt zur vollen Stunde kurz auf, der andere Zwilling sieht diese Lichtblitze.

Laut O:

Eigenzeit

In den ersten 8 O-Stunden blitzen O'-Uhren 4 mal, also

$$\frac{1 \text{ O'-Stunde}}{1 \text{ O-Eigenstunde}} = \frac{1}{2}$$

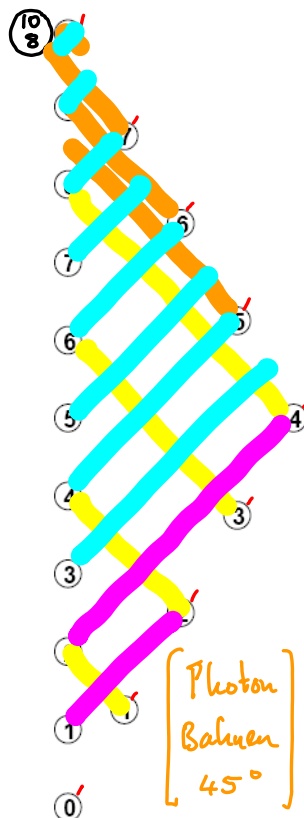
In den letzten 2 O-Stunden

blitzen O'-Uhren 4 mal,

$$\text{also } \frac{1 \text{ O'-Stunde}}{1 \text{ O-Eigenstunde}} = 2$$

O berechnet Gesamtreisezeit laut O'-Uhren, in Eigenzeit-Stunden:

$$\begin{aligned} & (8 \text{ O-Eigenstunden}) \times \left(\frac{1}{2} \frac{\text{O'-Stunde}}{\text{O-Eigenstunde}} \right) \\ & + (2 \text{ O-Eigenstunden}) \times \left(2 \frac{\text{O'-Stunde}}{\text{O-Eigenstunde}} \right) \\ & = 8 \text{ O'-Stunden} \end{aligned}$$



Laut O':

Eigenzeit

In den ersten 4 O'-Stunden blitzen O-Uhren 2 mal, also:

$$\frac{1 \text{ O-Stunde}}{1 \text{ O'-Eigenstunde}} = \frac{1}{2}$$

In den letzten 4 O'-Stunden

blitzen O-Uhren 8 mal, also

$$\frac{1 \text{ O-Stunde}}{1 \text{ O'-Eigenstunde}} = 2$$

O' berechnet Gesamtreisezeit laut O-Uhren, in Eigenzeit-Stunden:

$$\begin{aligned} & (4 \text{ O'-Eigenstunden}) \times \left(\frac{1}{2} \frac{\text{O-Stunde}}{\text{O'-Eigenstunde}} \right) \\ & + (4 \text{ O'-Eigenstunden}) \times \left(2 \frac{\text{O-Stunde}}{\text{O'-Eigenstunde}} \right) \\ & = 10 \text{ O-Stunden} \end{aligned}$$