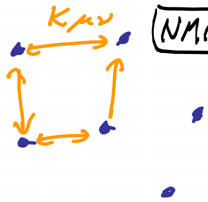
System von Massenpunkten

(U3) 22.4.08

NM15



(N2) $$m_\nu \ddot{\vec r}_\nu = \vec K_\nu \qquad (1) \qquad \nu = 1,\dots,N$$

$$\vec K_\nu = \vec K_\nu^{(a)} + \sum_{\mu=1,\dots,N}^{\mu\neq\nu} \vec K_{\nu\mu}^{(i)} \qquad (2)$$

äußeren Kräfte

von m_μ auf m_ν ausgeübte "innere" Kraft

Def: Schwerpunkt (SP) $$\vec R = \frac{1}{M}\sum_\nu m_\nu \vec r_\nu \qquad (3)$$

$M = \sum_\nu m_\nu$ = Gesamtmasse

$$M\ddot{\vec R} = \sum_\nu m_\nu \ddot{\vec r}_\nu \overset{(2)}{=} \sum_\nu K_\nu^{a} + \underbrace{\sum_\nu\left(\sum_{\mu\neq\nu} \vec K_{\mu\nu}\right)}_{=0} \qquad (4)$$

NM16

denn $$S = \sum_\nu \sum_\mu^{\neq\nu} K_{\mu\nu} \overset{\text{Umbenennen: } \nu\leftrightarrow\mu}{=} \sum_\mu^{\mu\neq\nu}\sum_\nu K_{\nu\mu} = \sum_\nu\sum_\mu^{\mu\neq\nu} K_{\nu\mu} = -\sum_\nu\sum_\mu^{\mu\neq\nu} K_{\mu\nu} \qquad (1)$$

vertausche Reihenfolge der Summe

$S = -S \Rightarrow S = 0$

$\Rightarrow$ (15.4) $$M\ddot{\vec R} = \sum_\nu \vec K_\nu^{(a)} = \vec K = \text{gesamte äußere Kraft} \qquad (2)$$

SP verhält sich so wie ein Punkteilchen mit Masse M, Ortsvektor R, unter Einfluß äußeren Kraft K, unabhängig von inneren Kräften

Es ist oft sinnvoll, SP so zu wählen dass Schwerpunktsimpuls = 0:
dieses Bezugsystem heißt "SP-System"

NM17

Def: SP-Drehimpuls

$$\vec L \overset{(8.3)}{=} \sum_\nu \vec r_\nu \times m_\nu \dot{\vec r}_\nu \qquad (1)$$

Def: Externes Dreh-Moment

$$\vec M \overset{(8.4)}{=} \sum_\nu \vec r_\nu \times \vec K_\nu^{(a)} \qquad (2)$$

(1) :

$$\frac{d}{dt}\vec L = \overset{\dot{\vec r}_\nu \times m \dot{\vec r}_\nu}{0} + \sum_\nu \vec r_\nu \times \underbrace{m_\nu \ddot{\vec r}_\nu}_{\vec K_\nu} \qquad (3)$$

$$\overset{(15.2)}{=} \sum_\nu \vec r_\nu \times \vec K^{(a)} + \underbrace{\sum_\nu \vec r_\nu \times \sum_{\mu\neq\nu} K^{(i)}_{\nu\mu}} \qquad (4)$$

$$\overset{(17.2)}{=} \vec M_{tot} \qquad \overset{\mu\leftrightarrow\nu}{=} \sum_\nu \sum_{\mu\neq\nu} \vec r_\mu \times \underbrace{\vec K^{(i)}_{\mu\nu}}_{= -\vec K^{(i)}_{\nu\mu}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec L} = \vec M_{tot}} \quad (5) \qquad = \frac{1}{2} \sum_\mu^{\mu\neq\nu} \sum_\nu \left(\vec r_\nu - \vec r_\mu\right) \times \vec K^{(i)}_{\mu\nu} \overset{(N3)}{=} 0$$

(wie (9.2) für einzelnen Massenpunkt)

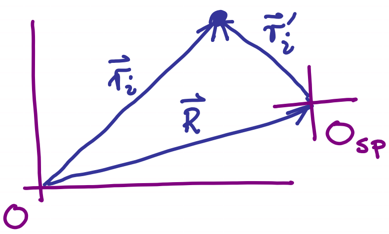
Drehimpulserhaltung: $\vec M_{tot} = 0 \Rightarrow \vec L = \text{konst}$ (6)

NM18

Transformation ins SP-System

Schreibe $\quad \vec r_\nu = \vec R + \vec r_\nu{}' \qquad (1)$

SP- { Ort, Geschw. } { Ortsvektor, Geschw. } im SP-System



$\frac{d}{dt}$ (1) $\quad \vec v_\nu = \vec V + \vec v\,' \qquad (2)$

Transformiere ins SP-System: wähle O_{sp} so, dass: $\vec R\,' = \sum_\nu m_\nu \vec r_\nu{}' = 0 \qquad (3)$

(SP-Koorindate im SP-System = 0)

und $\dot{\vec R}\,' = \sum_\nu m_\nu \dot{\vec r}_\nu{}' = 0$ (SP ruht im SP- (4)

Gesamtimpuls:

$$\vec P = \sum_\nu m_\nu \dot{\vec r}_\nu = \sum_\nu m_\nu \left(\dot{\vec R} + \dot{\vec r}_\nu{}'\right) \qquad (5)$$

$$= M \dot{\vec R} + \overset{(4)}{0} \qquad (6)$$

$\Rightarrow$ Gesamtimpuls = Schwerpunktimpuls

$\boxed{\text{NM19}}$

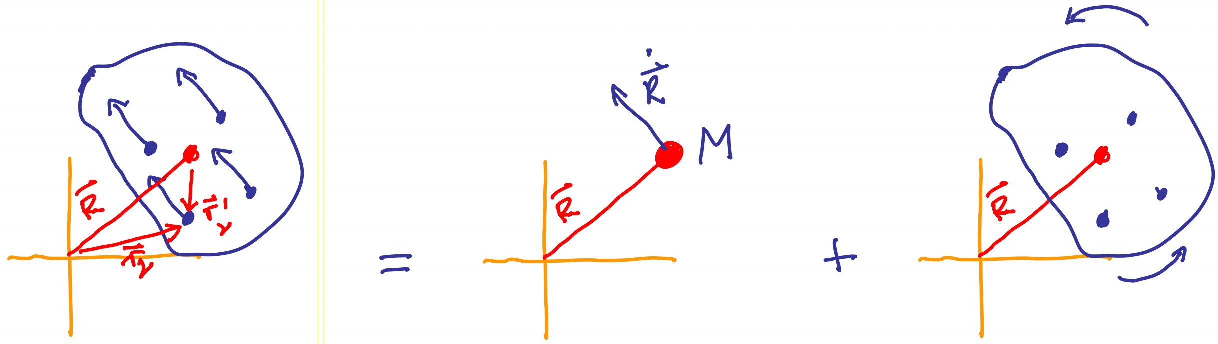
Gesamtdrehimpuls:

$$\vec{L} = \sum_\nu \vec{r}_\nu \times m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \qquad (1)$$

$$= \sum_\nu \left(\overset{1}{\vec{R}} + \overset{2}{\vec{r}_\nu'}\right) \times m_\nu \left(\overset{3}{\dot{\vec{R}}} + \overset{4}{\dot{\vec{r}}_\nu'}\right) \qquad (2)$$

$$= \overset{1\,2}{\vec{R} \times M \dot{\vec{R}}} + \overset{2\,3}{\underset{}{\overset{(18.4)}{0}}} + \overset{1\,4}{\overset{(18.3)}{0}} + \overset{2\,4 \quad (N2)}{\sum_\nu \vec{r}_\nu' \times \vec{p}_\nu'} \qquad (3)$$

Gesamtdrehimpuls um O = Dreimpuls (um O) einer Punktmasse M am SP-Ort R,
+ Derimpuls der Teilchen um den SP O' am SP-Ort R



Erhaltungssätze (zum Ersten) [nach S. Kehrein]

22.4.07

$\boxed{\text{ES1}}$

Def: "Abgeschlossenes System": hat keine Wechselwirkung mit Massenpunkten ausserhalb des Systems.

Betrachte abg. S. aus N Massenpunkten, beschrieben durch Pot. $V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$

Kraft auf Massenpunkt ν in Richtung $i = 1,2,3$ $= x,y,z$

$$F_\nu = -\frac{\partial V}{\partial r_{\nu_i}} = \partial_{\nu_i} V \qquad (1)$$

Bsp: Gravitationspot. für N Körper:

$$V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = -G \sum_{\nu<\mu} \frac{m_\nu m_\mu}{|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|} \qquad (2)$$

keine Doppelzählung!

= Summe aus "Zweikörperpotentialen"

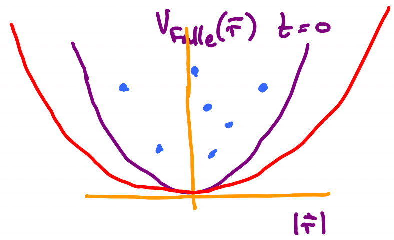
ES2

Satz: Ein abgeschlossenes System sei durch ein Potential $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ beschrieben. Falls V nicht explizit von der Zeit abhängt ("V invariant unter Zeitverschiebungen $t \to t + t_0$" "Homogenität der Zeit"), ist Gesamtenergie zeitlich konstant.

Bemerkung: "Homogenität der Zeit" bedeutet: keine 'absolute' Zeit ist ausgezeichnet. z.B.: 2 Beobachter in unterschiedl. Inertialsystemen mit verschiedenem Zeitursprung sehen die gleichen Naturgesetze.

Gegenbeispiel: Atome in optischer Falle,

mit
$$V = V_{\text{Falle}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) + \sum_{\nu < \mu} V_{\text{int}}(\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu)$$
$$V_{\text{Falle}} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{2} k(t)\, \vec{r}_\nu^{\,2}$$



(Pot. öffnet sich als Fkt. v. t)

ES3

Beweis:

Gesamtenergie:
$$E \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{N} \frac{m_\nu}{2} (\dot{\vec{r}}_\nu)^2 + V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \qquad (1)$$

$\partial_t(1)$:
$$\frac{dE}{dt} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\, \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \ddot{\vec{r}}_\nu^{\,2} + \sum_{\nu=1}^{N} \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial r_{\nu i}} \frac{\partial r_{\nu i}}{dt}}_{\underbrace{\vec{\nabla}_\nu V}_{-\vec{F}_\nu} \cdot\, \dot{\vec{r}}_\nu} \qquad (2)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \left(m_\nu \ddot{\vec{r}}_\nu - \vec{F}_\nu \right) \overset{(N2)}{=} 0 \quad \checkmark \qquad (3)$$

Satz: Ein abgeschlossenes System sei durch ein Potential $V(\vec r_1, \dots, \vec r_N)$ beschrieben. Falls V invariant unter Verschiebungen um beliebigen Vektor $\vec a$ ist, **ES4**

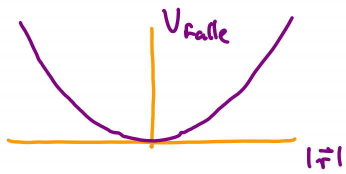
$$V(\vec r_1, \dots, \vec r_N) = V(\vec r_1 + \vec a, \dots, \vec r_N + \vec a) \tag{1}$$

("Homogenität des Raums"), ist Gesamtimpuls zeitlich konstant:

$$\vec P = \sum_{\nu=1}^{N} \vec p_\nu = \text{konst.} \tag{2}$$

Bemerkung (i): Homogenität des Raums: kein Punkt im Raum ist ausgezeichnet.

Gegenbeispiel: Atome in optischer Falle:



Bemerkung (ii): Bedingung für 2-Teilchen WW, dass Pot. nur von Ortsdifferenzen abhängt, z.B. Grav. Pot.: **ES5**

$$V(\vec r_1, \vec r_2) = V(\vec r_1 - \vec r_2) = V(\vec r_1 + \cancel{\vec a} - (\vec r_2 + \cancel{\vec a})) \tag{1}$$

Beweis:

$$\partial_{a_i}(4.1): \quad 0 = \partial_{a_i} V(\vec r_1, \dots, \vec r_N) = \partial_{a_i} V(\vec r_1 + \vec a, \dots, \vec r_N + \vec a) \tag{2}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \sum_i \underbrace{\frac{\partial V}{\partial r_{\nu i}}}_{-F_{\nu i}} \underbrace{\frac{\partial (r_{\nu i} + a_i)}{\partial a_i}}_{=1} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{\nu=1}^{N} \vec F_\nu \overset{(N2)}{=} \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_{\nu=1}^{N} \vec p_\nu}_{\text{Gesamtimpuls: } \vec P_{Tot}} \rightarrow \boxed{\vec P_{tot} = 0} \tag{4}$$

Explizit: $\dfrac{\partial r_i}{\partial r_j} = \delta_{ij}$

ES5a

Beweis:

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial x}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial y}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial r_j} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{ij}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{wenn } i=j \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

ES6

Folgerung: Schwerpunkt eines abgeschlossenen Systems mit Eigenschaft (4.1) bewegt sich gleichförmig, mit Geschw. $\vec{P}/M$, wobei $M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu$ = Gesamtmasse.

Beweis: Schwerpunkt $\vec{R}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu$ (1)

$\dot{(1)}$ $\quad \dot{\vec{R}} = \frac{1}{M} \sum_{\nu=1}^{N} m \dot{\vec{r}}_\nu = \frac{\vec{P}_{Tot}}{M} = \text{konst.}$

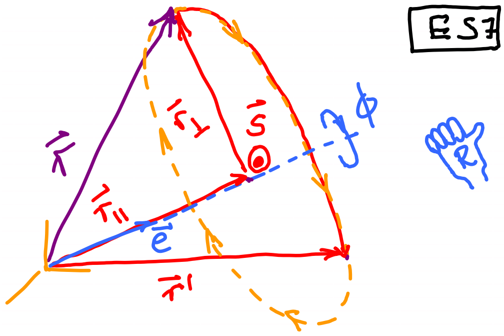
Nächster Schritt: Konsequenz der Isotropie des Raums?

Vorher ...

ES7

Mathematischer Exkurs über Drehungen

Drehe den Vektor $\vec r$ um einen Winkel ϕ (gegenuhrz.) parallel zu einer Achse $\hat e$, mit $|\hat e| = 1$. In welchen Vektor $\vec r\,'$ geht $\vec r$ über? (Sog. aktive Transf.)



Zerlege $\vec r$ bezüglich $\hat e$:
$$\vec r = \vec r_\parallel + \vec r_\perp \qquad (1)$$

$\parallel$ (1a)

Siehe Blatt 1 Beispielaufgabe 1
$$= \hat e(\hat e\cdot\vec r) + \underbrace{(\hat e\times\vec r)}_{\equiv \vec s}\times\hat e \qquad (2)$$

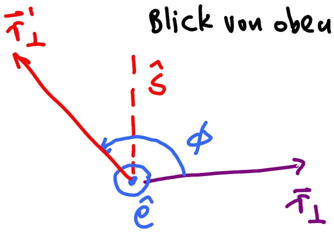
Schreibe:
$$\vec s = \hat e\times\vec r \qquad (3)$$

mit
$$\vec r_\perp = \vec s\times\hat e \qquad (4)$$

Rotierter Vektor:
$$\vec r\,' = \vec r_\parallel + \vec r\,'_\perp \qquad (5)$$

$$\vec r\,'_\perp = \vec r_\perp\cos\phi + \vec s\sin\phi \qquad (6)$$

Blick von oben



Rechte Hand: $\vec r_\perp = \vec s\times\hat e$

$\vec r_\perp \equiv$ Daumen

$\vec s \equiv$ Zeigefinger

$\hat e \equiv$ Mittelfinger

ES8

$$\vec r\,' \overset{(1.5),(1.6)}{=} \vec r_\parallel + \vec r_\perp\cos\phi + \vec s\sin\phi \qquad (1)$$

(7.1a) (7.4) (7.3)

$$= \hat e(\hat e\cdot\vec r) + \vec s\times\hat e\cos\phi + \hat e\times\vec r\sin\phi \qquad (2)$$

Endergebnis für rotierten Vektor:
$$\boxed{\vec r\,' = \vec r\cos\phi + (1-\cos\phi)\,\hat e(\hat e\cdot\vec r) + \hat e\times\vec r\sin\phi} \qquad (3)$$

Infinitesimale Drehung um $d\phi$:
$$\vec r\,' = \vec r + \underbrace{d\phi\,\hat e}_{\equiv d\vec\omega}\times\vec r \qquad (4)$$

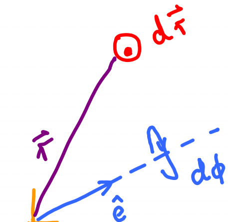
$\phi\to 0$:

$\cos\phi \to$

$\sin\phi \to$

$$d\vec\omega \overset{\text{def}}{=} d\phi\,\hat e \qquad (5)$$

Dann
$$\boxed{d\vec r \overset{\text{def}}{=} \vec r\,' - \vec r = d\vec\omega\times\vec r} \qquad (6)$$



Logisch: für infinitesimale Drehung ist Änderung v. $\vec r$ zum Ausgangsvektor $\vec r$

Ende math. Exkurs.

ES9

Def: Drehimpuls eines Teilchens bezüglich Ursprung: $\vec{L} \overset{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p}$ (1)

Def: Drehmoment, das auf Teilchen wirkt: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (2)

Satz: Ein abgeschlossenes System sei durch ein Potential $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ beschrieben. Falls V invariant unter Drehungen um den Ursprung ist,

gleiche Transf. (8.2) für alle N Vektoren

$$V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = V(\vec{r}_1{}', \dots, \vec{r}_N{}') \qquad (3)$$

("Isotropie des Raumes"), dann ist Gesamtdrehimpuls bezüglich des Ursprungs, $\vec{L} = \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{p}_\nu$, zeitlich erhalten.

ES10

Bem: Verallg. für Drehung um anderen Punkt ist offensichtlich.

Beweis: Betrachte inf. Drehung $d\phi$ um Einheitsvektor $\hat{e}$:

(8.6)
$$\vec{r}\,' = \vec{r} + d\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{r} + d\phi\, \hat{e} \times \vec{r} \qquad (1)$$

$\frac{d}{d\phi}$ (9.3):
$$0 = \frac{d}{d\phi} V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \left[\frac{d}{d\phi} V(\vec{r}_1{}', \dots, \vec{r}_N{}')\right]_{\phi=0} \qquad (2)$$

gilt für alle ϕ, also auch für $\phi = 0$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \left[\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_\nu{}'} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu{}'}{d\phi}\right]_{\phi=0} \qquad (3)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \underbrace{\vec{\nabla}_\nu V}_{-\vec{F}_\nu} \cdot (\hat{e} \times \vec{r}_\nu) \qquad (4)$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{N} \hat{e} \cdot (\vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu) \qquad (5)$$

$\hat{e}$ ist beliebig $\Rightarrow$
$$0 \overset{(5)}{=} \sum_{\nu=1}^{N} \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu = \vec{M} \qquad (5)$$

$\leftarrow$ {Gesamtdrehmoment verschwindet

ES11

Folglich: (9.1)

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_\nu \underbrace{\dot{\vec{r}}_\nu \times \vec{p}_\nu}_{\dot{\vec{r}}_\nu \times m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu = 0} + \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \dot{\vec{p}}_\nu \qquad (1)$$

$$\overset{(N2)}{=} \sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu \overset{(10.5)}{=} 0 \qquad \square \qquad (2)$$

Bemerkung (i): 2-Teilchenpotentiale die nur vom Abstand abhängen (und nicht von ihrer Orientierung relativ zueinander) sind isotrop.

Bsp: Grav. Pot.: $\mathcal{U}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \propto \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ (3)

Def: Eine "Zentralkraft" wirkt immer in Richtung der Verbindungsgerade zweier Massenpunkte: $\vec{F}_{\mu\nu} \parallel \vec{r}_\mu - \vec{r}_\nu$ (4)

Folgerung: Für Zentralkräfte gilt Drehimpulserhaltung, denn $M = 0$:

Gesamt-Drehmoment v. Teilchen ν und μ:

$$\vec{M} = \vec{r}_\nu \times \vec{F}_{\nu\mu} + \vec{r}_\mu \times \vec{F}_{\mu\nu} \qquad (5)$$

$$\overset{(N3)}{=} (\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu) \times \vec{F}_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{l}} = 0 \Rightarrow \vec{l} = \text{const.}$$

ES12

Bem (ii) Isotrope 2-Teilchenpotentiale führen zu Zentralkräften

Beweis: $V(\vec{r}) = f(|\vec{r}|)$ hängt nur vom Abstand ab.

$\Rightarrow$ Kraft:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial r_i}\hat{e}_i \qquad (1)$$

$$\left[\begin{aligned} r &= [r_1^2 + r_2^2 + r_3^2]^{1/2} \\ \frac{\partial r}{\partial r_1} &= \frac{r_1}{[r_1^2+r_2^2+r_3^2]^{1/2}} = \frac{r_1}{r} \end{aligned} \right]$$

$$= -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f(r)}{\partial r} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial r_i}}_{\frac{r_i}{r}} \hat{e}_i = -\frac{\partial f(r)}{\partial r}\hat{r} \qquad (2)$$

$$\left[\hat{r} = \frac{r_i \hat{e}_i}{r}\right]$$

Bem (iii) Es gibt auch (z.B.) isotrope 3-Körperkräfte, die keine Zentralkräfte sind. Auch für diese gilt, wie gezeigt, Drehimpulserhaltung!

Zentrales Thema der modernen Theoretischen Physik:

$$\boxed{\text{Symmetrien} \longrightarrow \text{Erhaltungssätze}}$$

zur Kenntnisnahme: ES13

Falls alle Kräfte konservativ sind, kann gezeigt werden, dass Energie folgende allgemeine Form hat:

$$E = T + U^{(a)} + U^{(i)} \qquad (1)$$

Kinetische Energie:

$$T = \sum_\nu \frac{1}{2} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2} , \qquad (2)$$

Potential für externe Kräfte:

$$U^{(a)} = \sum_\nu U_\nu^{(a)}(\vec{r}_\nu) , \qquad (3)$$

$$\text{mit } \vec{K}_\nu^{(a)} = -\partial_{\vec{r}_\nu} U^{(a)} , \qquad (4)$$

Potential für interne Kräfte:

$$U^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu}^{\nu \neq \mu} U_{\nu\mu}(\underbrace{|\vec{r}_\nu - \vec{r}_\mu|}_{r_{\nu\mu}}) , \qquad (5)$$

$$\text{mit } \vec{F}_{\nu\mu}^{(i)} = -\partial_{\vec{r}_{\nu\mu}} U^{(i)} . \qquad (6)$$