Relativistische Masse

V4 - 14.07.08 SR36

Grundgleichungen der Mechanik:

Newton 2: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Isoliertes System $\sum_i \vec{p}_i = \text{konst.}$

Def. Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$

Relativistisches Prinzip: Diese Gleichungen sollen Lorentz-invariant sein,
d.h., ihre Form nicht ändern unter Lorentz-Transformationen.

Wir werden sehen: Dieses erfordert:

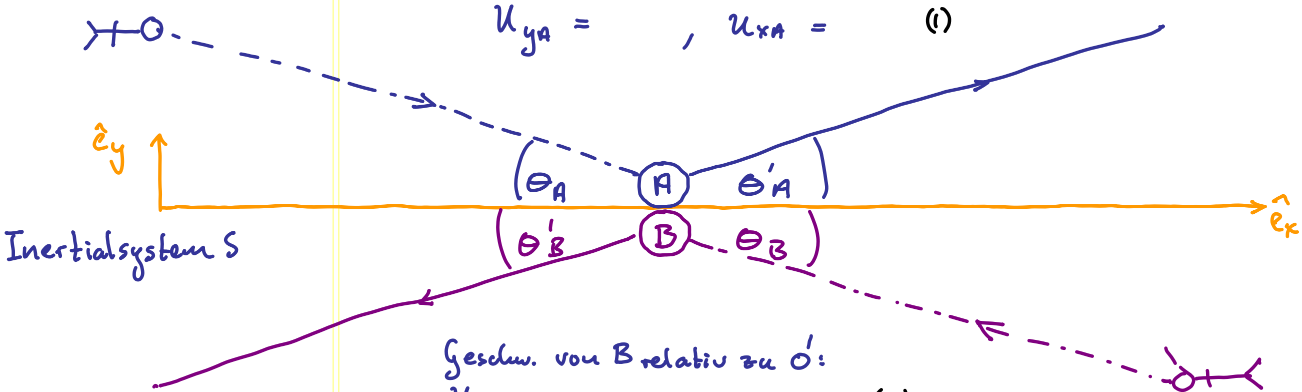
Ziel heute: finde diese Funktion!

Klassische Ruhemasse

Elastischer Stoss zweier identischer Massen

SR37

Geschw. von A relativ zu O:
$u_{yA} =$, $u_{xA} =$ (1)



Geschw. von B relativ zu O':
$u_{yB} =$, $u_{xB} =$ (2)

O (O') fliegt nach rechts (links), mit Geschwindigkeit: (O' rel. zu O:)

O wirft Kugel mit Geschw. relativ zu O, und O' auch, mit Geschw. relativ zu O'

Annahme:

so dass ein elastischer Stoß symmetrisch erfolgt:

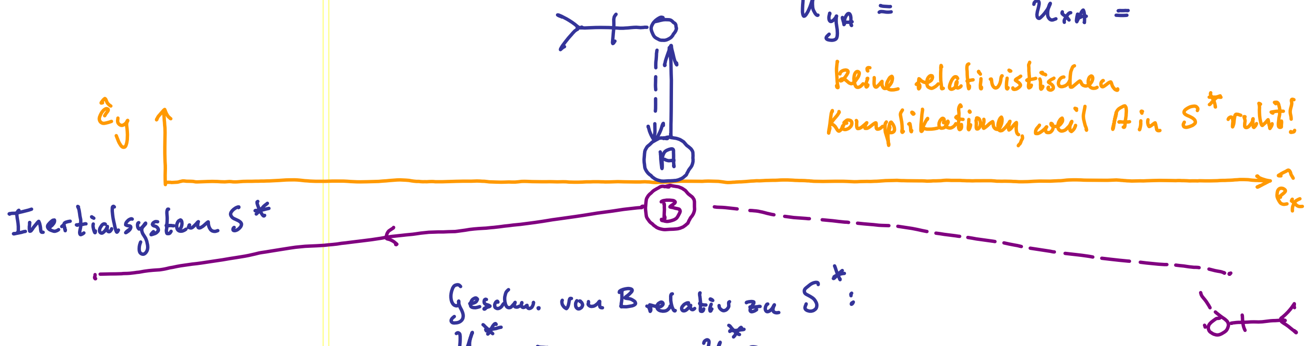
Impulserhaltung garantiert: $\theta'_A =$, $\theta'_B =$
$v'_A =$, $v'_B =$

alle Winkel gleich
Geschw. unverändert

Stoß aus Sicht eines mit O mitbewegten Inertialsystem I*:

Geschw. von A relativ zu S^*:
$u^*_{yA} =$ $u_{xA} =$

keine relativistischen Komplikationen, weil A in S^* ruht!



Geschw. von B relativ zu S^*:
$u^*_{yB} =$, $u^*_{xB} =$

S* fliegt nach rechts neben A her (Geschw. relativ zu S), also ruht O in S*.

Aus Sicht von S*: $u^*_{xB} =$
(Lorentz-Transf. von O' nach S*):

$u^*_{yB} =$

Annahme: $u \ll v$
$\Rightarrow$ Betrag $u^*_B =$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v} \qquad (32.6)$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - v u_x/c^2)} \qquad (32.7)$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - v u_x/c^2)} \qquad (32.8)$$

Analyse des Stoßes: gilt Impulserhaltung aus Sicht von S*?

	u^*_{xA}	u^*_{yA}	Betrag u^*_A	Masse	u^*_{xB}	u^*_{yB}	Betrag u^*_B	Masse	Impuls: $p^*_y = \sum_{A,B} m(u^*) u^*_y$
vorher:									(1)
nachher:									(2)

(3)

Fazit $(p^*_y)_{nacher}$ $(p^*_y)_{vorher}$ (3)

Aber:
Impulserhaltung fordert: $(p^*_y)_{nacher}$ $(p^*_y)_{vorher}$ (4)

$\boxed{(p^*_y)_{nachher} \quad (p^*_y)_{vorher}}$

(5)

$\Rightarrow$ $m(v)\, u/\gamma - m_0 u \overset{(2),(5)}{=}$ (6)

(7)

Falls $m(v) = m_0$ für alle v, dann Inkonsistenz:

Einziger Ausweg: $m(v) \overset{(6)}{=}$ (8) = "Masse eines bewegten Teilchen" "relativistische Masse"

m_0 = "Ruhemasse", Masse eines Teilchens im IS, in dem es ruht!

Warum ist m abhängig vom Bezugsystem (BS)?
Grund: wir fordern Lorentz-Invarianz der Impulserhaltung, also sollte nicht von abhängen!!

per Definition von τ

Aber: $p_y = m \underbrace{u_y}_{\text{hängt von } \gamma \text{ ab}} \qquad =$ (2)

Eigenzeit: τ sei "Eigenzeit" des Zeilchens, gemessen von einer mitbewegten Uhr, also die Zeit in dem IS, in dem Teilchen ruht. Alle Beobachter sind sich über Eigenzeit eines Teilchens einig, d.h. τ ist unabhängig von Bezugsystem des Beobachters.

Es gilt: $\boxed{\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma}}$ (3) Warum? Bewegte Uhr (τ) geht als Uhr (t), zeigt kleinere Zeit an, $\Rightarrow$

Um (1) zu erfüllen, definieren wir rel. Masse: $m \overset{\text{wie in (39.8)}}{=} \gamma m_0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{}$ (4)

unabhängig von γ, also dieselbe Form für S, S* !!

Verallgemeinerung:
Def. des relativistischen Impulses: laut O: $\bar{p} = \qquad \overset{(3)}{=}$ (5)

laut O': $\bar{p}' =$ (6)

Bezug zur kinetischen Energie:

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2)$

$$m - m_0 = \qquad = m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right) \quad (1)$$

$$= m_0\left(\qquad \right) = \quad (2)$$

Kinetische Energie: $K(v) = \frac{1}{2} m_0 v^2 \overset{c^2 \times (2)}{=} \qquad \overset{(4,5)}{=}$ (3)

Def: relativistische Energie: $E(v) =$ (4)

Def: Ruheenergie: $E(0) =$ (5)

$\Rightarrow$ (3) $\qquad E(v) =$ (6)

[Allgemein: $K = \int_{x_i}^{f} dx \, F(x)$, $\quad F = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt}$ (7)]

Zusammenfassung: Relativistische Energie (E) und Impuls ($\vec{p}$) sind definiert als:

$$E = mc^2 = m_0 \gamma c^2 = m_0 \frac{dt}{d\tau} c^2 \quad (1a) \qquad \gamma = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1c)$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = m_0 \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} = m_0 \frac{dt}{d\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} = m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau} \quad (1b)$$

Es kann gezeigt werden [mittels Lorentz-Transformation und (2,3)]:

- E und $\vec{p}$ sind erhaltene Größen (2)
- Lorentz-Transformation liefert:

$$\boxed{\begin{aligned} E' &= \gamma(E - \vec{p}\cdot\vec{v}) \quad (3a) \\ \vec{p}\,' &= \gamma(\vec{p} - E\,\vec{v}/c^2) \quad (3b) \end{aligned}}$$

Zum Vergleich:

$$\boxed{\begin{aligned} c^2 t' &= \gamma(c^2 t - \vec{x}\cdot\vec{v}) \\ \vec{x}\,' &= \gamma(\vec{x} - c^2 t\,\vec{v}/c^2) \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ $(\frac{E}{c}, \vec{p})$ hat dieselben Transf.-Eigenschaften wie $(ct, \vec{x})$

$p^\mu = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z) \leftarrow$ Vorausschau T1 $\rightarrow$ $x^\mu = (ct, x, y, z)$

"Vierervektoren"

das ist tiefe Grund für Lorentz-Invarianz der Mechanik!

Konsistenz-Check: (2), (3) $\Rightarrow$ E', $\vec{p}\,'$ sind auch erhalten! (4)

$\Rightarrow$ **Energie- und Impulserhaltungsätze sind Lorentz-invariant**

Bezug zwischen E und $\vec{p}$:

$(42.1a)^2$: $\quad E^2 =$ (1)

$(42.1b)^2$: $\quad p^2 =$ (2)

$(1) - c^2(2)$: $\quad E^2 - p^2c^2 =$ (3)

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = c^2p^2 + m_0^2 c^4} \quad (4)$$

Ausgangspunkt für relativistische Quantenmechanik und die Dirac-Gleichung!

(42.1a) in (42.1b): $\quad \vec{p} =$ (5)

$m = E/c^2$

Für Photonen: $\quad m_0 =$ (6)

$\Rightarrow$ (4) liefert: $\quad E =$ (Def. des Impulses eines Photons) (7)

(7) ist konsistent mit (5), falls ✓