

Inertialsysteme, Galilei-Transformation

(254) 24.04.08

Gal1

N1 liefert Definition von Inertialsystem (IS)

sehen gleich aus

Relativitätsprinzip von Galilei: alle IS sind gleichwertig

(1)

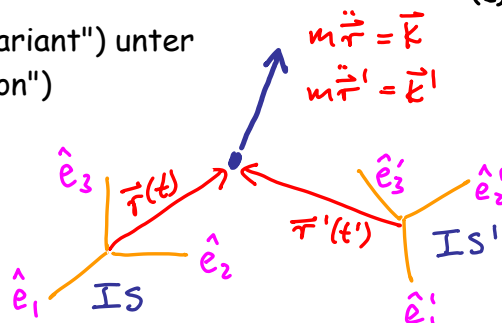
Genauer: (Alle) Inertialsysteme sind für Beschreibung (aller) physikalischer Gesetze äquivalent. (Labor im Zug = Labor im Bahnhof)

(2)

Konkret: N1, N2, N3 sind forminvariant (oder "kovariant") unter Transformation von IS zu IS' ("Galilei-Transformation")

Dasselbe Ereignis habe in

IS Koordinaten (x_i, t)
IS' " (x'_i, t')



In IS:

$$\left. \begin{matrix} N1 \\ N2 \end{matrix} \right\} : m \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \begin{cases} 0 \\ K_i(\vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}, t) \end{cases} \quad (3)$$

Galilei-Prinzip besagt:

In IS' haben N1, N2 dieselbe Form:

$$\left. \begin{matrix} N1 \\ N2 \end{matrix} \right\} : m \frac{d^2 x'_i}{dt'^2} = \begin{cases} 0 \\ K'_i(\vec{x}', \frac{d\vec{x}'}{dt'}, t') \end{cases} \quad (4)$$

(keine zusätzlichen Terme!)

(1.3) und (1.4) beschreiben dasselbe physikalische System, aber aus verschiedenen IS betrachtet [also eine "passive Transformation"]

Gal2

$$x_i = \sum_j (A^{-1})_{ij} x'_j + v_i t + x_i^0$$

"Galilei-Transf." ist allgemeinste Transf., die diese "Kovarianz" gewährleistet:

(1)

$$x'_i = \sum_j A_{ij} x_j - v_i t - x_i^0, \quad t' = t - t_0$$

A = orthogonale 3x3 Matrix

Drehmatrix

Relativgeschw.

Verschiebung d. Ursprungs in Raum und Zeit

Check:

$$\frac{d}{dt'} = \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d}{dt'} x'_i(t') = \sum_j A_{ij} \frac{d}{dt} x_j(t) - v_i \quad (2)$$

$$\left. \begin{matrix} N1 \\ N2 \end{matrix} \right\} \frac{d^2}{dt'^2} m x'_i(t') = \sum_j A_{ij} \frac{d^2}{dt^2} m x_j(t) = \begin{cases} 0 \\ \sum_j A_{ij} K_j(x, \dot{x}, t) \end{cases} \equiv \begin{cases} 0 \\ K'_i(x', \dot{x}', t') \end{cases} \quad (3)$$

x ausdrücken durch x' durch invertieren von (1)

Also: N2 ist form-invariant, falls wir ansetzen:

$$K'_i(x', \dot{x}', t') = \sum_j A_{ij} K_j(x, \dot{x}, t)$$

(Komponenten d. Kraft im rotierten System)

(4)

Galilei-Transf. gewährleistet also Forminvarianz

Gal 3

Bemerkung: die Komponenten K_i und K'_i haben im Allgemeinen unterschiedliche Form, denn sie beziehen sich auf unterschiedlichen Bezugssysteme.
ZB.

$$\vec{K} = (K_1, K_2)_{IS} = (0, -K)_{IS}$$

$$\vec{K}' = (K'_1, K'_2)_{IS'} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}K, -\frac{1}{\sqrt{2}}K)_{IS'}$$

Dennoch beschreiben sie dieselben Vektoren.

$$\vec{K} = \vec{K}'$$

Deswegen:

$$\ddot{\vec{r}} = \sum_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \hat{e}_i = \ddot{\vec{r}}' = \sum_i \frac{d^2 x'_i}{dt'^2} \hat{e}'_i \quad (1)$$

$$\vec{K} = \sum_i K_i \hat{e}_i = \vec{K}' = \sum_i K'_i \hat{e}'_i \quad (2)$$

Weitere Bemerkung Galilei-Transformation

Gal 4

Zur Erinnerung: Newton's Bwgl. gelten nur in Inertialsystemen (IS)

Frage: Wie viele IS gibt es?

Bessere Formulierung: Welche Koord.-Transf. von einem kartesischem Koord.-system zu einem anderen lassen $m\ddot{\vec{r}} = 0$?

Antwort: Alle Galilei-Transf: $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = R \vec{r} + \vec{v}t + \vec{r}_0$
 $t \rightarrow t' = t + t_0$ (1)
 Drehmatrix (siehe später)

Bemerkung: Galilei-Transf. bilden eine "Gruppe" (siehe später)

Interpretation der Galilei-Transf:

(i) Passive Transf: Ein physikalisches System wird von zwei Inertialsystemen aus betrachtet. Beide Experimentatoren sehen die gleichen physikalischen Gesetze $\Rightarrow$ 'Forminvarianz' der Bwgl. $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$

ii) Aktive Transf.: Betrachte zwei physikalische Systeme vom gleichen Inertialsystem aus, welche durch Galilei-Tr. ineinander übergehen. Auch hier Forminvarianz der Bew.gl.

Gal5

Bemerkung (1): Galilei invarianz stimmt nur für Geschw: $v \ll c_{\text{vakuum}}$
Beobachtung: Vakuumlichtgeschw. ist in allen Bezugssystemen konstant (gleich) $\Rightarrow$ Widerspruch zu $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}$

(ii) Diese Klasse v. IS (verknüpft durch Galilei-T.) definiert Newton's "absoluten Raum":

Newton: "Der absolute Raum, in seiner Natur ohne Beziehung zu etwas äußerem, bleibt immer gleich und unveränderlich."

Kritik: Woran kann man diesen absoluten Raum festmachen?

Gal6

[Erde im Zentrum der Welt?

Sonne " " " "

Milchstraße " " " ...]

Einstein's Lösung in der allgemeinen Relativitätstheorie:

Physik ist nicht "einfach" in einem globalen, absoluten Raum, sondern sie ist "einfach" in jedem lokalen, "frei fallenden" Bezugssystem.

$\Rightarrow$ Aufgabe des Postulats des absoluten Raums.

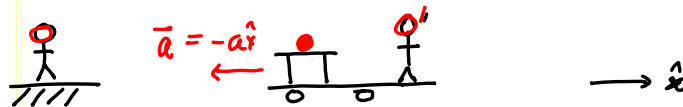
Beschleunigte Bezugssysteme:

BB1

Wird O' relativ zu O beschleunigt, misst O' andere Kräfte als O , und merkt so die Beschleunigung. $\Rightarrow O'$ ist kein IS.

Beobachtungen von O und O' sind nicht äquivalent.

Beispiel:



Wagen wird nach links beschleunigt, Kugel rollt nach rechts vom Tisch!

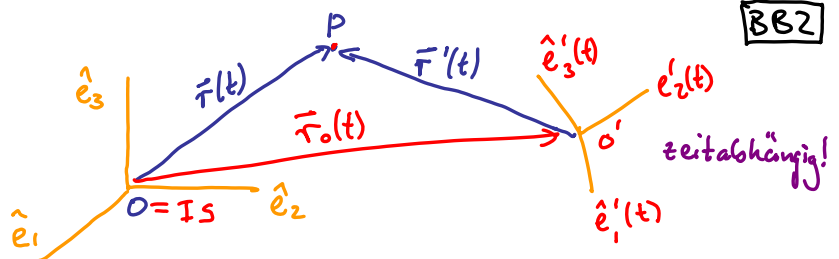
O sagt: Ich ruhe, Kugel bewegt sich nicht spürt also keine Kraft, $\vec{F} = 0$.

O' sagt: Ich ruhe, Kugel beschleunigt sich mit $a \hat{x}$ nach rechts spürt also Kraft $\vec{F}' = m a \hat{x}$ = "Scheinkraft" = "Trägheitskraft"

Eine "Scheinkraft" oder "Trägheitskraft" ist keine wirkliche Kraft. Wird nur gebraucht, um Messung in beschleunigten Bezugssystem (BS) O' zu interpretieren, falls Beschleunigung nicht berücksichtigt wird. In einem IS (O) sind alle Scheinkräfte = 0.

Allgemeine Transformationsregel:

Sei O (z.B. raumfest) ein IS,
 O' (z.B. rotierend) $\neq$ IS:



BB2

Ortsvektor:

$$\vec{r}(t) - \vec{r}_0(t) = \vec{r}'(t) \quad (1)$$

[Einsteinsche
Summenregel $\sum_i$
Vorausgesetzt]

$$x_i(t) \hat{e}_i - x_{i,0}(t) \hat{e}_i = x'_i(t) \hat{e}'_i(t) \quad (2)$$

$$\text{Geschwindigkeit: } (2) \quad \underbrace{\dot{x}_i(t) \hat{e}_i}_{\text{Geschw. v. P laut O}} - \underbrace{\dot{x}_{i,0}(t) \hat{e}_i}_{\text{Geschw. v. O' relativ zu O}} = \underbrace{\dot{x}'_i(t) \hat{e}'_i(t)}_{\text{Geschw. v. P laut O'}} + \underbrace{x'_i(t) \dot{\hat{e}}'_i(t)}_{\text{Geschw. eines starr mit O' mitrotierenden Punktes, v. O aus gesehen (nur Richtung ändert sich)}} \quad (3)$$

Interpretation:

Geschw. v. P laut O

Geschw. v. O' relativ zu O

Geschw. v. P laut O'

$= \vec{\omega} \times \vec{r}'$ (siehe BB4)
Geschw. eines starr mit O' mitrotierenden Punktes, v. O aus gesehen
(nur Richtung ändert sich)

Kurznotation für (3):

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{r} \right)_O - \left(\frac{d}{dt} \vec{r}_0 \right)_O = \left(\frac{d}{dt} \vec{r}' \right)_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (4)$$

Punkt besagt (nur heute): Ableitung wirkt nur auf Komponenten.

Einschub: Interpretation von $\vec{\omega}$: momentane Winkelgeschwindigkeit von O' relativ zu O . BB3

Begründung: Für infinitesimale Drehung um $d\phi$, um $\hat{e}$ -Achse: (ES8.6)
 $\vec{r}' = \vec{r} + d\phi \hat{e} \times \vec{r}$ (1)

Für den aktuellen Zweck Ausgangsvektor: $\vec{r} \rightarrow \hat{e}'$ (2)

machen wir folgende Assoziationen: Rotierter Vektor: $\vec{r}' \rightarrow \hat{e}' + \Delta \hat{e}'$ (3)

Rotationsachse: $\hat{e} \rightarrow \hat{n}$ (4)

(1) liefert dann: $\hat{e}' + \Delta \hat{e}' = \hat{e}' + \Delta \phi \hat{n} \times \hat{e}'$ (5)

pro Zeiteinheit: $\frac{\Delta \hat{e}'}{\Delta t} = \hat{n} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \times \hat{e}'$ (6)

Definiere:

$$\vec{\omega} = \hat{n} \frac{d\phi}{dt} \Rightarrow \boxed{\hat{e}' = \vec{\omega} \times \hat{e}'} \quad (7)$$

(= "Winkelgeschwindigkeit", mit Drehachse: $\hat{\omega} = \hat{n}$ Drehgeschwindigkeit: $|\vec{\omega}| = d\phi/dt$)
 (7): $x'_i \dot{e}'_i = \vec{\omega} \times \hat{e}'_i x'_i = \vec{\omega} \times \vec{r}'$ Ende Einschub.

Fortsetzung S.2:

BB4

$$(2.3): \dot{x}_i(t) \hat{e}_i - \dot{x}_{i,0}(t) \hat{e}_i = \dot{x}'_i(t) \hat{e}'_i(t) + x'_i(t) \dot{\hat{e}}'_i(t) \quad (1)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{r}' \right)_{IS} = \left(\frac{d}{dt} (\vec{r} - \vec{r}_0) \right)_{IS} = \left(\frac{d}{dt} \vec{r}' \right)_{BS} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (2)$$

$\Rightarrow$ Zeitableitung von O aus Zeitableitung von O' aus gesehen, betrifft nur Komponenten (nicht $\hat{e}'_i$) Einfluss der Rotation v. O' relativ zu O , Zeitableitung betrifft nur $\dot{\hat{e}}'_i$, nicht Komponenten.

Eiselsbrücke zur Ableitung eines Vektors in rotierendem Bezugssystem:

$$\left(\frac{d}{dt} \vec{R}' \right)_{IS} = \left(\frac{d}{dt} \vec{R}' \right)_{BS} + (\vec{\omega} \times \vec{R}')_{BS} \quad (3)$$

Analog für Beschleunigung:

BB5

$$\frac{d}{dt} [\dot{\vec{x}}_i(t) - \dot{\vec{x}}_{i,0}(t)] \hat{e}_i \stackrel{c}{=} \stackrel{(BB4.1)}{=} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{x}}'_i(t) \hat{e}'_i(t)) + \frac{d}{dt} (\vec{x}'_i(t) \underbrace{\vec{\omega} \times \hat{e}'_i(t)}^B) \quad (1)$$

$$[\ddot{\vec{x}}_i(t) - \ddot{\vec{x}}_{i,0}(t)] \hat{e}_i = \left[\ddot{\vec{x}}'_i(t) \hat{e}'_i(t) + \underbrace{\dot{\vec{x}}'_i(t) \dot{\hat{e}}'_i(t)}_{\vec{\omega} \times \hat{e}'_i} \right]_A$$

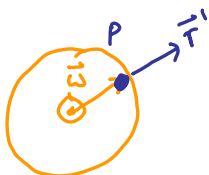
$$\left[\underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'} + \dot{\vec{x}}'_i(t) \vec{\omega} \times \hat{e}'_i(t) + \vec{x}'_i(t) \underbrace{\vec{\omega} \times \dot{\hat{e}}'_i(t)}_{(\vec{\omega} \times \hat{e}'_i)} \right]_c \quad (2)$$

$$(\ddot{\vec{r}} - \ddot{\vec{r}}_0)_{Is} = \left[\underbrace{\ddot{\vec{r}}'}_{\text{Zeitableitung von } O' \text{ aus gesehen, betrifft nur Komponenten (nicht } \hat{e}'_i)} + 2 \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' \right] \quad (3)$$

Bewegungsgleichung:

$$\text{in } O (= Is) : \vec{F} = m \ddot{\vec{r}} \quad (1)$$

$$\text{in } O' (\neq Is) : \vec{F}' = m \ddot{\vec{r}}' \stackrel{(5.3)}{=} \underbrace{m \ddot{\vec{r}}}_{(1)} - m \ddot{\vec{r}}_0 + 2 m \dot{\vec{r}}' \times \vec{\omega} + m \vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega}) + m \vec{r}' \times \dot{\vec{\omega}} \quad (2)$$

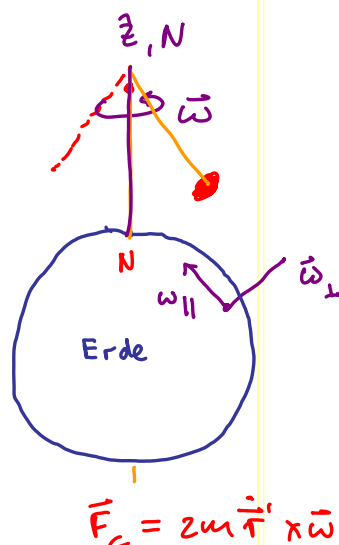


$$\vec{F}' = \underbrace{\vec{F}}_{\text{linear-beschleunigende Kraft}} + \underbrace{\vec{F}_l}_{\text{"Coriolis-Kraft"}} + \underbrace{\vec{F}_c}_{\text{Zentrifugal-Kraft}} + \underbrace{\vec{F}_z}_{\text{Zentrifugal-Kraft}} + \underbrace{m \vec{r}' \times \dot{\vec{\omega}}}_{\text{namelos}} \quad (3)$$

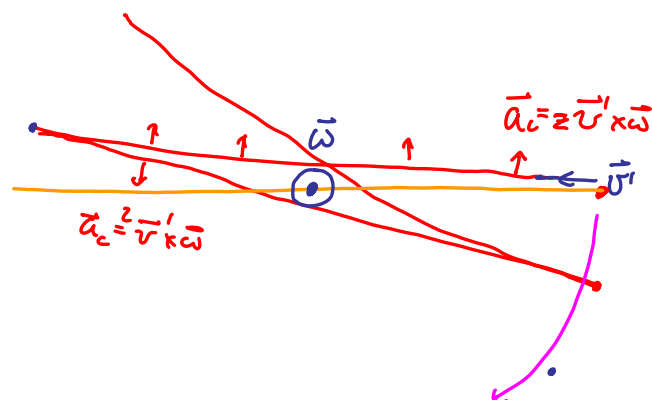
(Annahme im Folgenden: $\dot{\vec{\omega}} = 0$.)

Die Scheinkräfte $\vec{F}_l$, $\vec{F}_c$, $\vec{F}_z$, $m \vec{r}' \times \dot{\vec{\omega}}$ werden in O' (aber nicht O) benötigt, (weil $O' \neq Is$), um die (sehr realen!), in O' gemessenen Beschleunigungen $[-\ddot{\vec{r}}_0, 2 \dot{\vec{r}}' \times \vec{\omega}, \vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega}), \vec{r}' \times \dot{\vec{\omega}}]$ zu interpretieren.

Gaspard Gustave de Coriolis (* 21. Mai 1792 in Nancy; † 19. September 1843 in Paris) war ein französischer Mathematiker und Physiker.

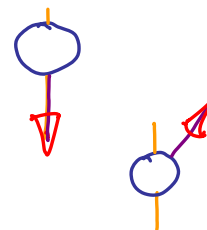


am Nordpol, blick von oben



Aufgaben zum selberrechnen:

- wie sieht das Schwingungsmuster am Südpol aus?
- " " " " an Äquator?



Jean Bernard Léon Foucault (* 18. September 1819 in Paris; † 11. Februar 1868 ebenda) war ein französischer Physiker.

BB8

Foucault wurde in Paris geboren. Seine Ausbildung erhielt er von einem Privatlehrer, da ihm mangels Fleiß und Betragen nahegelegt wurde, die Schule zu verlassen. Er begann ein Medizinstudium, musste aber auch dieses abbrechen, da er den Ekel beim Sezieren nicht überwinden konnte. Ohne Universitäts-Studium widmete er sich der Physik und erarbeitete sich alles autodidaktisch.

In den 1840er Jahren trug er zu den Comptes Rendus, einer Beschreibung eines elektromagnetischen Regulators für die elektrische Bogenlampe bei und veröffentlichte zusammen mit Henri Victor Regnault eine Arbeit über binokulares Sehen. 1851 führte er das nach ihm benannte Foucault'sche Pendel der Öffentlichkeit vor. Dieses ursprünglich von Vincenzo Viviani übernommene Experiment zeigte laientauglich erstmals die Erdrotation.

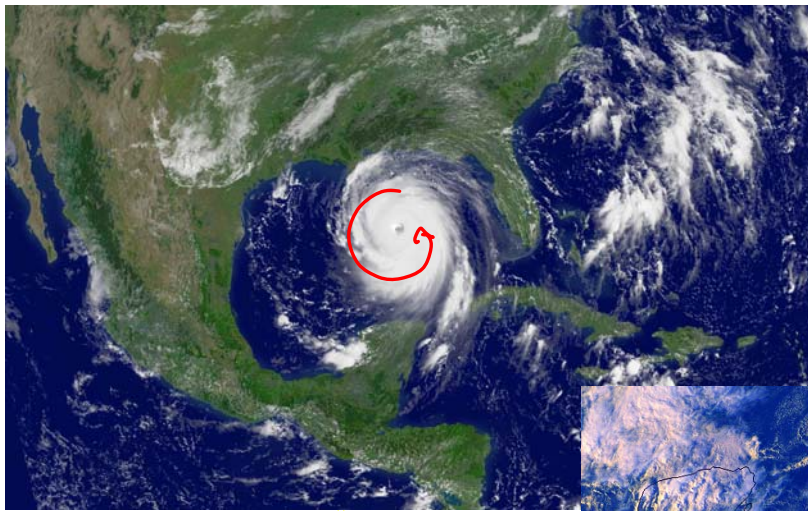


Ein Jahr später gelang ihm mit Hilfe der Drehspiegelmethode eine sehr genaue Messung der Lichtgeschwindigkeit, die er auf 298.000 km/s bestimmte. Er verwendete dabei einen Drehspiegel, der dem von Sir Charles Wheatstone ähnelte. Außerdem bewies er, dass die Lichtgeschwindigkeit in Wasser niedriger als in Luft ist, womit gleichzeitig die Wellennatur des Lichts bestätigt wurde.

In der Optik wird das von ihm entwickelte Foucault'sche Schneidverfahren zur Prüfung optischer Flächen oder ganzer optischer Systeme verwendet.

Weiter untersuchte Foucault Wirbelströme in Metallen, wofür er die Copley Medaille erhielt, entwickelte ein leistungsfähiges Spiegelteleskop und erfand 1852 das Gyroskop, basierend auf Johann Gottlieb Friedrich von Bohnenbergers Maschine von 1817. Er wurde 1865 in die französische Akademie der Wissenschaften aufgenommen.

Foucault erkrankte an Aphasie und starb, fast blind und stumm, am 11. Februar 1868 in Paris.

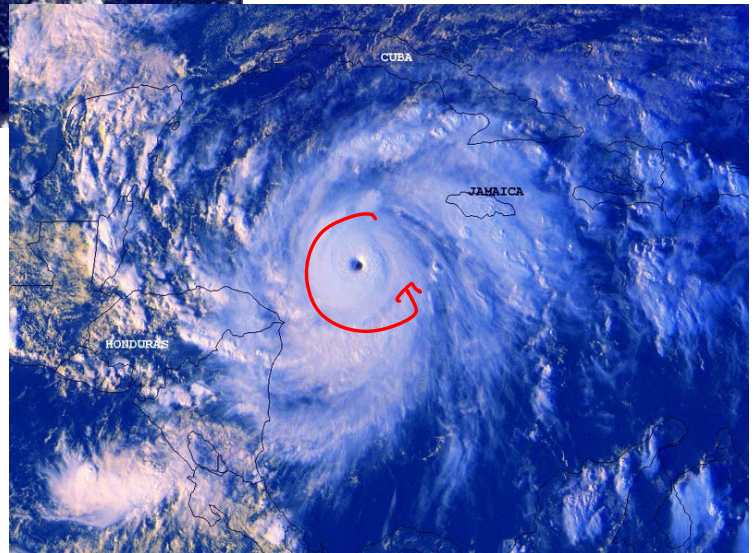


Hurricane Katrina

Wirbelstürme

BRG

Hurricane Mitch

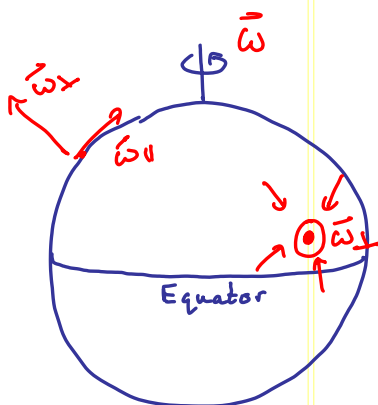


Drehrichtung in Nordhalbkugel:
Gegen den Uhrzeigersinn

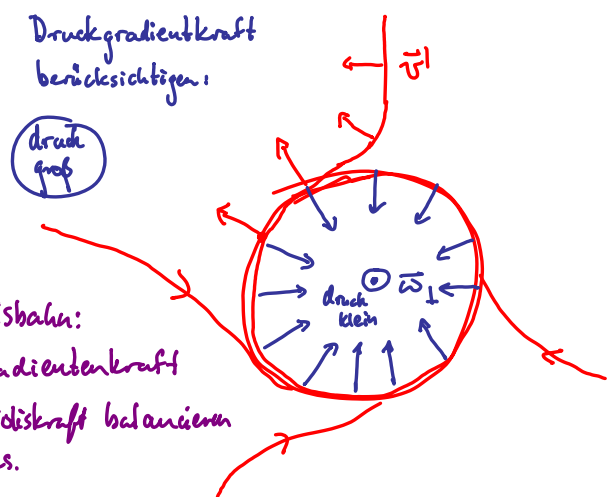
Wirbelstürme:

BRD

Warme Luft über dem Ozean steigt auf, erzeugt zur Niedrigdruckgebiet, das Luft lateral ansaugt. Die Coriolis-Kraft lenkt die angesaugte Luft ab, sodass Wirbel entsteht.



Am Equator:
 $\vec{\omega}_{\perp} = 0 \Rightarrow$
keine Wirbelstürme.



Auf Kreisbahn:
Druckgradientenkraft
und Corioliskraft balancieren
sich aus.