Relativistische Masse

Grundgleichungen der Mechanik:

Newton 2: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Isoliertes System $\sum_i \vec{p}_i = \text{konst.}$

Def. Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$

Relativistisches Prinzip: Diese Gleichungen sollen Lorentz-invariant sein, d.h., ihre Form nicht ändern unter Lorentz-Transformationen.

Wir werden sehen: Dieses erfordert: $m = m(v)$!! $m(0) = m_0$

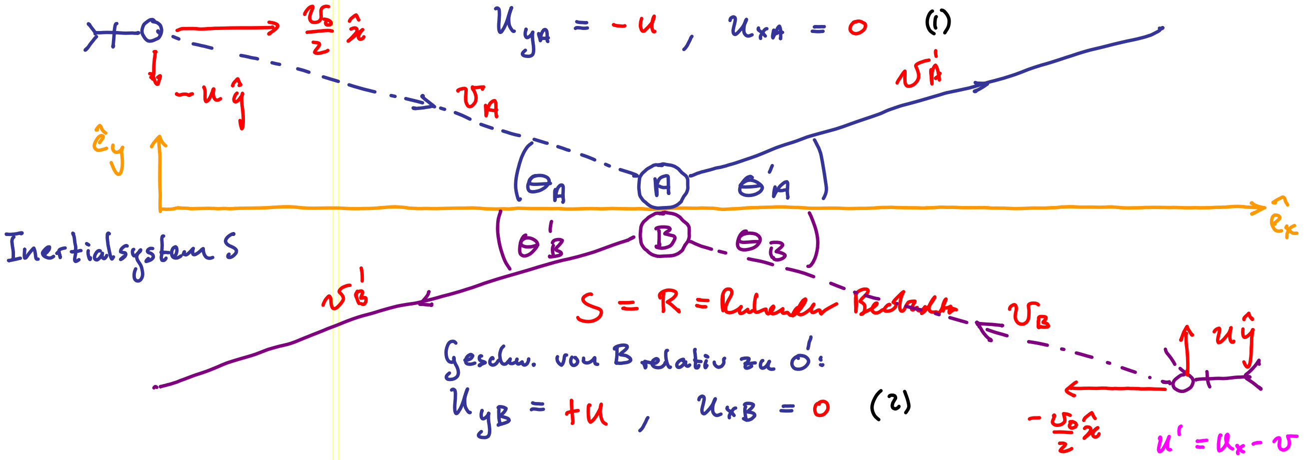
Klassische Ruhemasse

Ziel heute: finde diese Funktion!

Elastischer Stoss zweier identischer Massen

Geschw. von A relativ zu O:

$u_{yA} = -u \,, \quad u_{xA} = 0 \qquad (1)$



Geschw. von B relativ zu O':

$u_{yB} = +u \,, \quad u_{xB} = 0 \qquad (2)$

$u' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}$

O (O') fliegt nach rechts (links), mit Geschwindigkeit: $\pm \frac{v_0}{2}\hat{x}$

$\left(O' \text{ rel. zu } O: \; u' = -\frac{v_0}{1 + \frac{v_0^2}{4c^2}} \right)$

O wirft Kugel mit Geschw. $-u\hat{y}$ relativ zu O, und O' auch, mit Geschw. $u\hat{y}$ relativ zu O'.

Annahme: $u \ll v_0$

so dass ein elastischer Stoß symmetrisch erfolgt: $\theta_A = \theta_B$

Impulserhaltung garantiert: $\theta'_A = \theta_A \,, \quad \theta'_B = \theta_B$ alle Winkel gleich

$v'_A = v_A \,, \quad v'_B = v_B$ Geschw. unverändert

u_x = Geschw. v. O' bezüglich R $= -v_0/2$

v = Geschw. v. O bezüglich R $= +v_0/2$.

u' = Geschw. v. O' bezüglich O $= \dfrac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \dfrac{-v_0/2 - v_0/2}{1 + \frac{v_0^2}{4c^2}}$

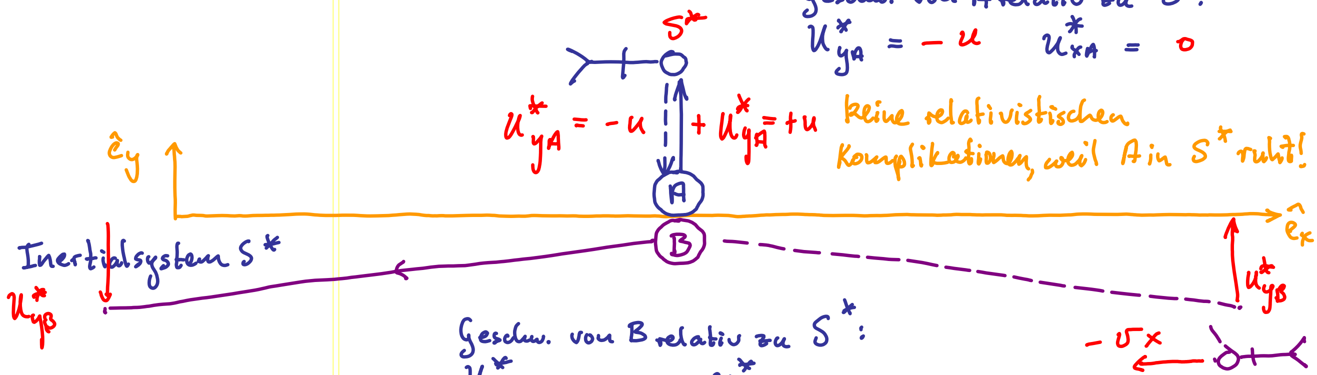
$$v = -\frac{v_0}{1 + v_0^2/4c^2}$$

Stoß aus Sicht eines mit O mitbewegten Inertialsystem I*: S^*

SR38

Geschw. von A relativ zu S^*:
$u^*_{yA} = -u \qquad u^*_{xA} = 0$

keine relativistischen Komplikationen, weil A in S^* ruht!



Geschw. von B relativ zu S^*:
$u^*_{yB} =$, $u^*_{xB} =$

$|v| = \dfrac{v_0}{1 + v_0^2 c^2/4}$

S^* fliegt nach rechts neben A her (Geschw $\frac{v_0}{2}\hat{e}_x$ relativ zu S), also ruht O in S^*.

(37.2) $u_{xB} = 0$

Aus Sicht von S^*: (Lorentz-Transf. von O' nach S^*):

$$u^*_{xB} = \frac{u_{xB} - v_{O'O}}{1 - \frac{u_{xB} v_{O'O}}{c^2}} = \frac{0 - |v|}{1 - \frac{0 \cdot v}{c^2}} = -|v|$$

$u_{xB} = 0$

$$u^*_{yB} = \frac{u}{(1 - v \cdot 0/c^2)\gamma} = \frac{u}{\gamma}$$

$u_{yB} = u$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2} \qquad (32.6)$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - v u_x/c^2)} \qquad (32.7)$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - v u_x/c^2)} \qquad (32.8)$$

Annahme: $u \ll v$

$\Rightarrow$ Betrag $u^*_B = \sqrt{u^{*2}_{xB} + u^{*2}_{yB}} = \sqrt{v^2 + u^2(1 - v^2/c^2)} \simeq v$

Analyse des Stoßes: gilt Impulserhaltung aus Sicht von S*?

	u^*_{xA}	u^*_{yA}	Betrag u^*_A	Masse$_A$	u^*_{xB}	u^*_{yB}	Betrag u^*_B	Masse$_B$	Impuls in $\hat{y}$: $p^*_y = \sum_{A,B} m(u^*)u^*_y$
vorher:	0	$-u$	u $(\ll c)$	$m(u^*_A) \simeq m(0) = m_0$	$-\lvert v\rvert$	u/γ	$\simeq v$	$m(u^*_B) \simeq m(v)$	$-m_0 u + \frac{m(v)u}{\gamma}$ (1)
nachher:	0	$+u$	u	m_0	$-\lvert v\rvert$	$-u/\gamma$	$\simeq v$	$m(v)$	$+m_0 u - \frac{m(v)u}{\gamma}$ (2)

Fazit $\quad (p^*_y)_{nachher} = -(p^*_y)_{vorher} \quad (3)$

Aber:

Impulserhaltung fordert: $\quad (p^*_y)_{nachher} = +(p^*_y)_{vorher} \quad (4)$

$(3) \pm (4) \Rightarrow \boxed{(p^*_y)_{nachher} = (p^*_y)_{vorher} = 0}$ (5)

$$\Rightarrow \quad m(v)\,u/\gamma - m_0 u \overset{(2),(5)}{=} 0 \qquad (6)$$

(7)

Falls $m(v) = m_0$ für alle v, dann Inkonsistenz: $m_0 u(1/\gamma - 1) = 0 \;\; \forall v$, unmöglich, weil $\gamma \neq 1$,

Einziger Ausweg: $\quad m(v) \overset{(6)}{=} m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (8) \quad =$ "Masse eines bewegten Teilchens" "relativistische Masse"

$m_0 =$ "Ruhemasse", Masse eines Teilchens im IS, in dem es ruht!

Warum ist m abhängig vom Bezugsystem (BS)?

Grund: wir fordern Lorentz-Invarianz der Impulserhaltung, also sollte p_y nicht von γ abhängen!! (1)

Aber: $\quad p_y = m \underbrace{u_y}_{\text{hängt von } \gamma \text{ ab}} = m\frac{dy}{dt} = m\left(\frac{dy}{d\tau}\right)\underbrace{\left(\frac{d\tau}{dt}\right)}_{1/\gamma} = m\frac{1}{\gamma}\frac{dy}{d\tau} \qquad (2)$

per Definition von τ

Eigenzeit: τ sei "Eigenzeit" des Zeilchens, gemessen von einer mitbewegten Uhr, also die Zeit in dem IS, in dem Teilchen ruht. Alle Beobachter sind sich über Eigenzeit eines Teilchens einig, d.h. τ ist unabhängig von Bezugsystem des Beobachters.

Es gilt: $\boxed{\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma}}$ (3) $\quad$ Warum? Bewegte Uhr (τ) geht langsamer als Uhr (t), zeigt kleinere Zeit an, $\tau < t \;\Rightarrow\; \tau = t/\gamma$

Um (1) zu erfüllen, definieren wir rel. Masse: $\quad m \overset{\text{wie in (39.8)}}{=} \gamma m_0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{m_0 \frac{dy}{d\tau}}$ (4) $\leftarrow$ unabhängig von γ, also dieselbe Form für S, S*!!

Verallgemeinerung:

Def. des relativistischen Impulses:

laut O: $\quad \boxed{\vec{p} = m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau}} \overset{(3)}{=} m_0 \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = m_0 \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (5)$

$= m\vec{v} \quad (6)$

laut O': $\quad \boxed{\vec{p}\,' = m_0 \frac{d\vec{r}\,'}{d\tau}}$

Bezug zur kinetischen Energie:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1+\tfrac{1}{2}x + O(x^2)$$

$$m - m_0 = m_0(\gamma - 1) = m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) \quad (1)$$

für $v/c \ll 1$:

$$= m_0\left(1 + \tfrac{1}{2}v^2/c^2 + \text{Terme}(v^4/c^4) - 1\right) = \tfrac{1}{2}m_0 v^2/c^2 \quad (2)$$

Kinetische Energie: $K(v) = \frac{1}{2}m_0 v^2 \overset{c^2 \times (2)}{=} c^2(m-m_0) \overset{(4,5)}{=} E(v) - E(0)$ (3)

Def: relativistische Energie: $E(v) = mc^2 = m(v)c^2$ (4)

Def: Ruheenergie: $E(0) = m_0 c^2$ (5)

$\Rightarrow$ (3) $\quad E(v) = E(0) + K(v)$ (6)

[Allgemein: $K = \int_{x_i}^{f} dx \, \underbrace{F(x)}_{= \frac{d}{dt}(mv) = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt}}$ (7)]

Zusammenfassung: Relativistische Energie (E) und Impuls ($\vec{p}$) sind definiert als:

$$E = mc^2 = m_0\gamma c^2 = m_0\frac{dt}{d\tau}c^2 \quad (1a) \qquad \gamma = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (1c)$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = m_0\gamma\frac{d\vec{r}}{dt} = m_0\frac{dt}{d\tau}\frac{d\vec{r}}{dt} = m_0\frac{d\vec{r}}{d\tau} \quad (1b)$$

Es kann gezeigt werden [mittels Lorentz-Transformation und (2,3)]:

- E und $\vec{p}$ sind erhaltene Größen (2)
- Lorentz-Transformation liefert:

$$\boxed{\begin{aligned} E' &= \gamma(E - \vec{p}\cdot\vec{v}) & (3a)\\ \vec{p}\,' &= \gamma(\vec{p} - E\,\vec{v}/c^2) & (3b)\end{aligned}}$$

Zum Vergleich:
$$\boxed{\begin{aligned} c^2t' &= \gamma(c^2t - \vec{x}\cdot\vec{v}) \\ \vec{x}\,' &= \gamma(\vec{x} - c^2t\,\vec{v}/c^2)\end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ $(\frac{E}{c}, \vec{p})$ hat dieselben Transf.-Eigenschaften wie $(ct, \vec{x})$

{das ist tiefe Grund für Lorentz-Invarianz der Mechanik!

$p^\mu = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z)$ $\leftarrow$ Vorausschau T1 $\rightarrow$ $x^\mu = (ct, x, y, z)$

$(p^\mu)' = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$ "Vierervektoren" LT: $(x^\mu)' = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

Konsistenz-Check: (2), (3) $\Rightarrow$ E', $\vec{p}\,'$ sind auch erhalten! (4)

$\Rightarrow$ **Energie- und Impulserhaltungssätze sind Lorentz-invariant**

Bezug zwischen E und $\vec{p}$:

$(42.1a)^2$: $\qquad E^2 = m^2 c^4$ (1)

$(42.1b)^2$: $\qquad p^2 = m^2 v^2$ (2)

$(1) - c^2(2)$: $\qquad E^2 - p^2c^2 = \overset{m_0^2\gamma^2}{m^2} c^4 \overbrace{\left(1 - v^2/c^2\right)}^{1/\gamma^2} = m_0^2 c^4$ (3)

$\Longrightarrow \qquad \boxed{E^2 = c^2p^2 + m_0^2 c^4}$ (4)

Ausgangspunkt für relativistische Quantenmechanik und die Dirac-Gleichung!

(42.1a) in (42.1b): $\qquad \vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v}$ (5)

$m = E/c^2$

Für Photonen: $\qquad m_0 \equiv 0$ (6)

$\Rightarrow$ (4) liefert: $\qquad E = cp$ (Def. des Impulses eines Photons) (7)

(7) ist konsistent mit (5), falls $v = c$ ✓