Relativistische Masse

Grundgleichungen der Mechanik:

Newton 2: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Isoliertes System $\sum_i \vec{p}_i = \text{konst.}$

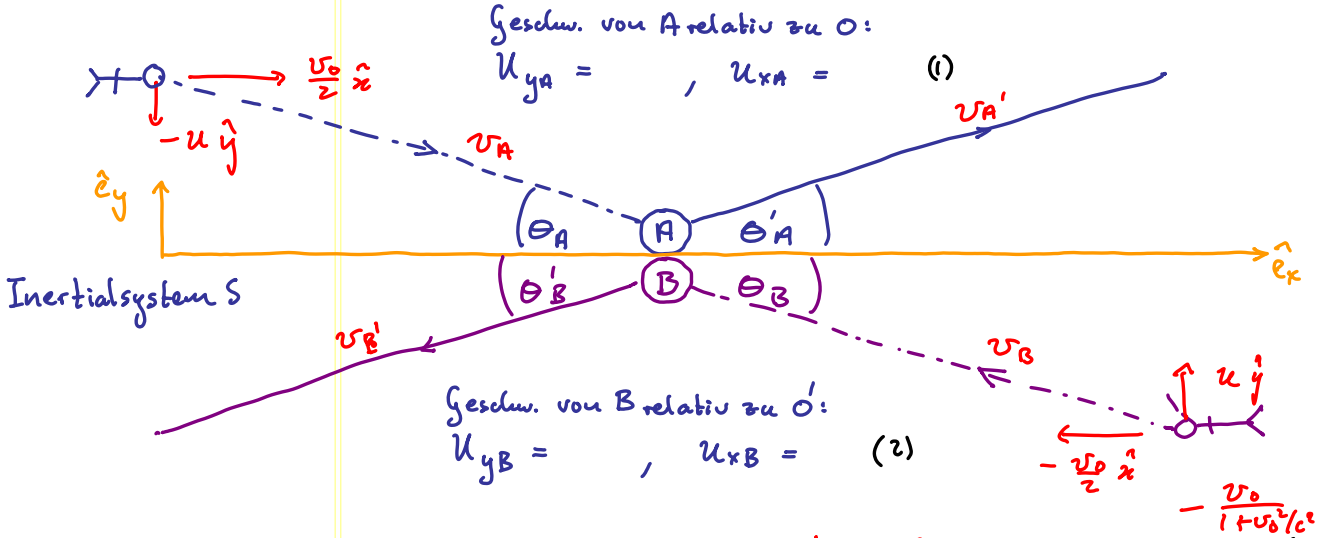
Def. Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$

Relativistisches Prinzip: Diese Gleichungen sollen Lorentz-invariant sein, d.h., ihre Form nicht ändern unter Lorentz-Transformationen.

Wir werden sehen: Dieses erfordert: $m = m(v)$!! mit $m(0) = m_0$ (klassische Ruhemasse)

Ziel heute: finde diese Funktion!

Elastischer Stoss zweier identischer Massen



O (O') fliegt nach rechts (links), mit Geschwindigkeit: $\pm\frac{v_0}{2}\hat{x}$ (O' rel. zu O: $-\frac{v_0}{2}\hat{x}$)

O wirft Kugel mit Geschw. $-u\hat{y}$ relativ zu O, und O' auch, mit Geschw. $u\hat{y}$ relativ zu O'

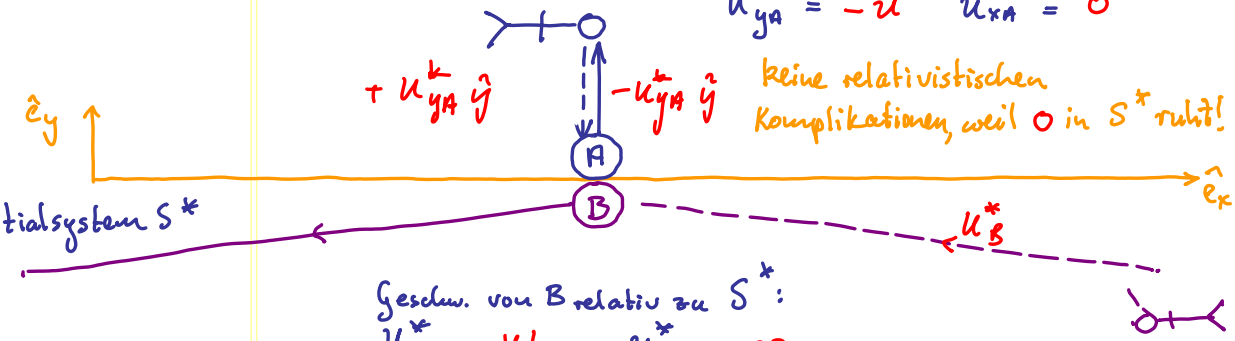
Annahme: $u \ll v$

so dass ein elastischer Stoß symmetrisch erfolgt: $\theta_A = \theta_B$

Impulserhaltung garantiert: $\theta_A' = \theta_A$, $\theta_B' = \theta_B$ alle Winkel gleich

$v_A' = v_A$, $v_B' = v_B$ Geschw. unverändert

Stoß aus Sicht eines mit O mitbewegten Inertialsystems S*:



$v = v_0/2$, $u_x = -v_0/2$

$u'_x = \frac{-v_0}{1+\frac{v_0^2}{c^2}}$ ✓

S* fliegt nach rechts neben A her (Geschw. $\frac{v_0}{2}\hat{e}_x$ relativ zu S), also ruht O in S*.

(37.2) $u_{xB} = 0$

Aus Sicht von S* (Lorentz-Transf. von O' nach S*):

$$u^*_{xB} = \frac{0 - v}{1 - 0\cdot v} = -v \qquad (u_{xB}=0,\ (37.2))$$

$$u^*_{yB} = \frac{u}{\gamma(1 - v\cdot 0/c^2)} = \frac{u}{\gamma} \qquad (u_{yB} = u,\ (37.2))$$

Annahme: $u \ll v$

$\Rightarrow$ Betrag $u^*_B = \sqrt{v^2 + u^2(1 - v^2/c^2)} \simeq v$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \qquad (32.6)$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - v u_x/c^2)} \qquad (32.7)$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - v u_x/c^2)} \qquad (32.8)$$

Analyse des Stoßes: gilt Impulserhaltung aus Sicht von S*?

	u^*_{xA}	u^*_{yA}	Betrag u^*_A	Masse	u^*_{xB}	u^*_{yB}	Betrag u^*_B	Masse	Impuls: $p^*_y = \sum_{A,B} m(u^*)u^*_y$
vorher:	0	$-u$	u (ccc)	$m(u^*_A) \simeq m(0) = m_0$	$-v$	u/γ	$\simeq v$	$m(u^*_B) \simeq m(v)$	$-m_0 u \leftarrow -\frac{m(v)u}{\gamma}$ (1)
nachher:	0	u	u	m_0	$-v$	$-u/\gamma$	$\simeq v$	$m(v)$	$m_0 u - \frac{m(v)u}{\gamma}$ (2)

Fazit $(p^*_y)_{nachher} = -(p^*_y)_{vorher}$ (3)

Aber: Impulserhaltung fordert: $(p^*_y)_{nachher} = +(p^*_y)_{vorher}$ (4)

(3) ± (4) $\Rightarrow$ $(p^*_y)_{nachher} = (p^*_y)_{vorher} = 0$ (5)

$\Rightarrow$ $m(v)\,u/\gamma - m_0 u \overset{(2),(5)}{=} 0$ (6)

(7)

Falls $m(v) = m_0$ für alle v, dann Inkonsistenz: $m_0 u\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) = 0$ $\forall v$, unmöglich

Einziger Ausweg:

$$m(v) \overset{(6)}{=} m_0\gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (8)$$

= "Masse eines bewegten Teilchens" "relativistische Masse"

m_0 = "Ruhemasse", Masse eines Teilchens im IS, in dem es ruht!

Warum ist m abhängig vom Bezugsystem (BS)?
Grund: wir fordern Lorentz-Invarianz der Impulserhaltung, also sollte p_y nicht von γ abhängen!!

Aber: $p_y = m u_y$ (u_y hängt von γ ab) $= m \frac{dy}{dt} = m \frac{dy}{d\tau}\left(\frac{d\tau}{dt}\right) = m \frac{1}{\gamma} \frac{dy}{d\tau}$ (2)

($\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma}$ per Definition von τ)

Eigenzeit: τ sei "Eigenzeit" des Zeilchens, gemessen von einer mitbewegten Uhr, also die Zeit in dem IS, in dem Teilchen ruht. Alle Beobachter sind sich über Eigenzeit eines Teilchens einig, d.h. ist unabhängig von Bezugsystem des Beobachters.

Es gilt: $\frac{d\tau}{dt} \equiv \frac{1}{\gamma}$ (3)

Warum? Bewegte Uhr (τ) geht langsamer als Uhr (t), zeigt kleinere Zeit an, $\tau < t \Rightarrow \tau = t/\gamma$

Um (1) zu erfüllen, definieren wir rel. Masse: $m \overset{\text{wie in (39.8)}}{=} \gamma m_0$ (2) $\Rightarrow$ $p_y = m_0 \frac{dy}{d\tau}$ (4)

(unabhängig von γ, also dieselbe Form für S, S^* !!)

Verallgemeinerung:
Def. des relativistischen Impulses:

laut O: $\vec{p} \equiv m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau} \overset{(3)}{=}$ (5)

laut O': $\vec{p}' = m_0 \frac{d\vec{r}'}{d\tau}$ (6)

Bezug zur kinetischen Energie:

$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2)$

$m - m_0 = m_0(\gamma - 1) = m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)$ (1)

für $v/c \ll 1$ $= m_0\left(1 + \frac{1}{2} v^2/c^2 + \text{Terme}\left(\frac{v^4}{c^4}\right) - 1\right) = \frac{1}{2} m_0 v^2/c^2$ (2)

Kinetische Energie: $K(v) = \frac{1}{2} m_0 v^2 \overset{c^2 \times (2)}{=} c^2(m - m_0) \overset{(4,5)}{=} E(v) - E(0)$ (3)

Def: relativistische Energie: $E(v) = mc^2$ (4)

Def: Ruheenergie: $E(0) = m_0 c^2$ (5)

$\Rightarrow$ (3) $E(v) = E(0) + K(v)$ (6)

[Allgemein: $K = \int_{x_i}^{x_f} dx\, F(x)$

$F = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt}$ (7)]

Zusammenfassung: Relativistische Energie (E) und Impuls ($\vec{p}$) sind definiert als:

$$E = mc^2 = m_0 \gamma c^2 = m_0 \frac{dt}{d\tau} c^2 \quad (1a) \qquad \gamma = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1c)$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = m_0 \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} = m_0 \frac{dt}{d\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} = m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau} \quad (1b)$$

Es kann gezeigt werden [mittels Lorentz-Transformation und (2,3)]:

- E und $\vec{p}$ sind erhaltene Größen (2)
- Lorentz-Transformation liefert:

$$E' = \gamma(E - \vec{p}\cdot\vec{v}) \quad (3a)$$

$$\vec{p}\,' = \gamma(\vec{p} - E\vec{v}/c^2) \quad (3b)$$

Zum Vergleich:

$$c^2 t' = \gamma(c^2 t - \vec{x}\cdot\vec{v})$$

$$\vec{x}' = \gamma(\vec{x} - c^2 t\,\vec{v}/c^2)$$

$\Rightarrow \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ hat dieselben Transf.-Eigenschaften wie $(ct, \vec{x})$ — das ist tiefe Grund für Lorentz-Invarianz der Mechanik!

$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right)$ ← Voraussicht TI → $x^\mu = (ct, x, y, z)$ "Vierervektoren"

LT: $(x^\mu)' = \Lambda^\mu_{\ \nu} (x^\nu)$

$(p^\mu)' = \Lambda^\mu_{\ \nu} (p^\nu)$

Konsistenz-Check: (2), (3) $\Rightarrow$ E', $\vec{p}\,'$ sind auch erhalten! (4)

$\Rightarrow$ Energie- und Impulserhaltungssätze sind Lorentz-invariant

Bezug zwischen E und $\vec{p}$:

(42.1a)^2: $E^2 = m^2 c^4$ (1)

(42.1b)^2: $p^2 = m^2 v^2$ (2)

(1) $- c^2$(2): $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 (1 - v^2/c^2) = m_0^2 c^4$ (3)

($m_0\gamma)^2$

$\Rightarrow$ $E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4$ (4)

Ausgangspunkt für relativistische Quantenmechanik und die Dirac-Gleichung!

(42.1a) in (42.1b): $\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v}$ (5)

($m = E/c^2$)

Für Photonen: $m_0 \equiv 0$ (6)

$\Rightarrow$ (4) liefert: $E = cp$ (Def. des Impulses eines Photons) (7)

(7) ist konsistent mit (5), falls $v = c$ ✓