

Kleine Schwingungen vieler Freiheitsgrade

(V6)

29.4.08

KSchw 10

Betrachte System mit f Freiheitsgraden: (z.B. N Teilchen in 3 Dim:)

Koordinaten:

$$q =$$

(1)

Geschwindigkeiten:

$$\dot{q} =$$

(2)

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^f m_i \dot{q}_i^2$$

(3)

"Massenmatrix"

$$\hat{T}_{ij} =$$

(4)

Nebenbemerkung:

Bei fortgeschrittenen Anwendungen (Lagrange, verallgemeinerte Koordinaten), ist $\hat{T}_{ij}$ im allg. nicht-diag, aber stets symmetrisch, mit positiven Eigenwerten.

Wir betrachten hier jedoch nur den (naheliegenden) Fall, $\hat{T}_{ij} = m_i \delta_{ij}$.

Potentielle Energie:

$$U$$

(i)

KSchw 11

Bewegungsgl:

$$m \ddot{q}_i =$$

(2)

Def:

Gleichgewichtslagen (Fixpunkte) sind zeitunabhängige Lösungen der Bewegungsgleichung:

$$q =$$

$$, \quad \dot{q} =$$

$$, \quad \ddot{q} =$$

(3)

Explizit:

(4)

(3) in (2):

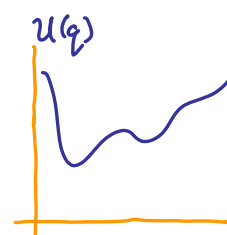
$$\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

(5)

Energie am Fixpunkt:

$$E_0 =$$

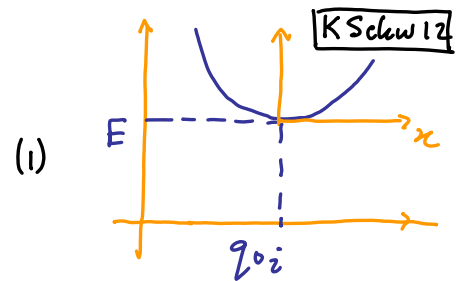
(6)



Umgebung eines Fixpunktes:

'Entwickle U
um q_0 herum,"
[d.h. $x_i = q_i - q_{i0}$, etc.]

$$\left. \begin{array}{l} x = \\ \bar{x} = \end{array} \right\} \text{seien klein}$$



Taylor-Entwicklung
des Potentials
in f Koordinaten
bis zur quadratischen
Ordnung in x :

$$U(q) = \quad (2)$$

Höhere Terme vernachlässigbar
bei kleinen Auslenkungen:

$$+ O(x^3) \quad (\text{enthält } \dots, \text{etc.})$$

Ohne Verlust der Allgemeinheit wählen wir:

(3)

In Matrix-Notation:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i \hat{V}_{ij} x_j = -\frac{1}{2} (x_1, \dots, x_f) \begin{pmatrix} V_{11} & \dots & V_{1f} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{f1} & \dots & V_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_f \end{pmatrix} \quad (4)$$

Bewegungsgleichung:

$$m_i \ddot{q}_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

K Schw 13

(1)

=

(2)

In Matrixnotation:



(Vergleiche Gl. 4.5)

(3)

Gl. (3) sind lineare, homogene Dgl. 2. Ordnung mit konst. Koeff.

Diese Vereinfachungen wurden erreicht durch Vernachlässigung der $O(x^3)$ -Terme!

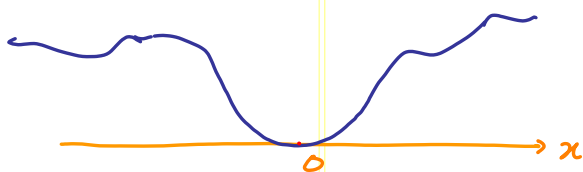
Beispiele: $f=1$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \quad \Rightarrow \quad (4)$$

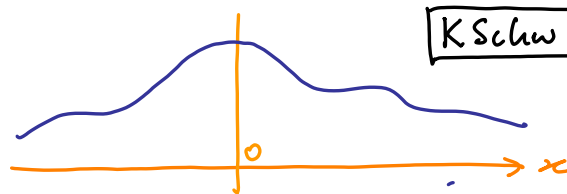
$$U(q) = U_0 + \frac{1}{2} k x^2 + o(x^3) \quad \Rightarrow \quad (5)$$

(3)

$$[\text{falls } k > 0: \text{ HD mit } \omega_0 = \sqrt{k/m}] \quad (6)$$



"stabiler Fixpunkt"



"instabiler Fixpunkt"

KSchw 14

$k > 0$:

Lösung: $x(t) =$

(1)

$\dot{x}(t) =$

(2)

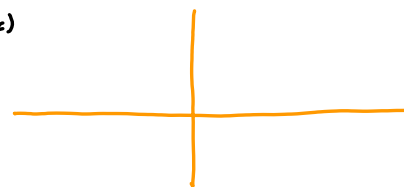
Harmonische
Näherung OK falls
Amplitude klein bleibt:

(3)

Energie-Erhaltung:

konst. = $E(q, \dot{q})$

(4)



System folgt Ellipse
im $(q, \dot{q})$ -Phasenraum:

$k < 0$:

Allg. Lösung:

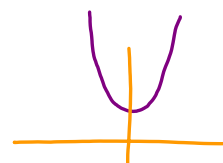
$$\begin{cases} \partial_x \cosh x = \sinh x \\ \partial_x \sinh x = \cosh x \end{cases}$$

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0 \quad (13.3)$$

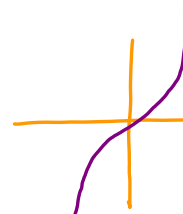
$q(t) =$

$\dot{q}(t) =$

KSchw 15



$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

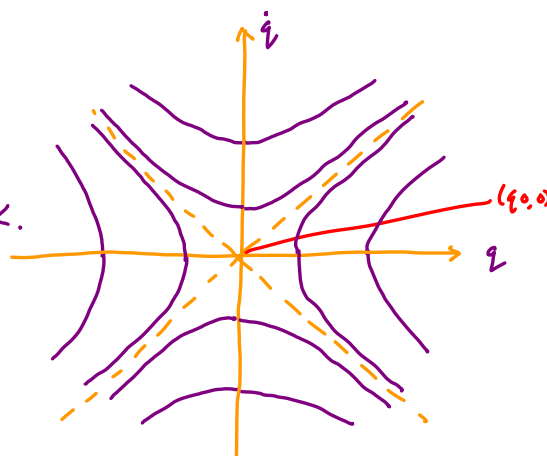


$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

System folgt Hyperbel im Phasenraum:

"Hyperbolischer Fixpunkt"

Harmonische Näherung nur für kurze Zeiten OK.
($\omega_0 t \lesssim 1$)

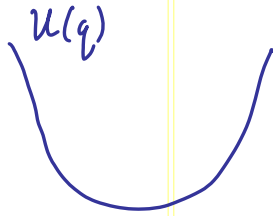
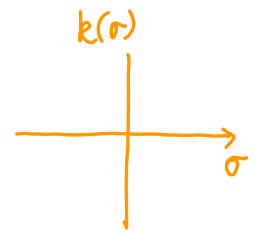


Betrachte $U = U(q, \sigma)$, mit $\sigma =$ Verstellbarer Parameter

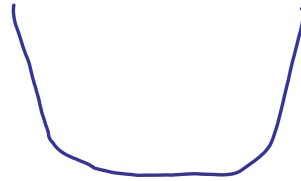
KSchw 16

Änderung v. σ kann Charakter des Fixpunkts ändern:

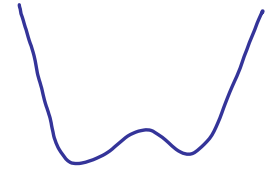
Harmonische Näherung: $U(q, \sigma) =$



stabiler
Fixpunkt



kritischer (oder marginaler)
Fixpunkt



instabiler
Fixpunkt

→
"Bifurkation"

Zurück zur
allg. Gleichung:

Bedingung für stabiles
Gleichgewicht:

(12.2)
⇒

$$T_{ij} \ddot{x}_j + V_{ij} x_j \stackrel{(13.3)}{=} 0 \quad (1)$$

$$U(q_0) \quad U(q_0 + x) \quad \text{f. alle genügend kleine } x \quad (2)$$

$$0 < \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i V_{ij} x_j \quad (3)$$

Kurznotation:
(Matrixmultiplikation ist implizit)

=

$$(\dots) \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (4)$$

=

(5)

Transformiere zur
Eigenbasis von V:

=

$$(\dots) \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\vdots} \\ \tilde{\vdots} \\ \tilde{\vdots} \end{pmatrix} \quad (6)$$

=

(7)

(3) erfordert: Eigenwerte v. V sind positiv! " V ist positiv-definite Matrix" (8a)

Ferner gilt auch allgemein: $\hat{T}$ ist positiv-definite Matrix (8b)

Allg. Lösungsverfahren
für Gl. (17.1);

$$T_{ij} \ddot{x}_j + V_{ij} x_j = 0$$

(1) KSchw 18

komplexer Spaltenvektor

Komplexer Lösungs Ansatz:

Schreibe: $\vec{x}(t) =$, mit $\vec{X}(t) =$

(2)

(Vorzeichen: meine
Konvention)

und fordere

$$T_{ij} \ddot{X}_j + V_{ij} X_j = 0 \quad (3)$$

(2) in (3):

$$\sum_j (T_{ij} + V_{ij}) = 0 \quad (4)$$

Matrix-Notation für (4):

(Eigenwertproblem) (5)

Nicht-triviale Lösung
erfordert:

(6)

charakteristisches Polynom:
(z.B. 5b.4)

(7)

Polynom von Grad f mit reellen Koeffizienten

Nullstellen von P^f ,

Sind "Eigenfrequenzen" von (18.5)
im Allgemeinen komplex

KSchw 19

Eigenvektoren $A^{(\alpha)}$ erfüllen die Gl:

$$\sum_j (V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) A_j = 0 \quad (18.5) \quad (2)$$

Entsprechende Lösung
v. (18.3) lautet:

$$\vec{X}^{(\alpha)}(t) = \text{"Eigenmode, Eigenschwingung"} \quad (3)$$

$\vec{T}$ ist positiv-definit;

(4)

Falls auch $\hat{V}$ positiv-definit ist, }

sind Wurzeln v. $P^f(\omega^2)$ positiv: $\omega_{(\alpha)}^2$, $\Rightarrow \omega_{(\alpha)}$ $\Rightarrow \vec{x}^{(\alpha)}(t)$

(gilt für stabiles Gleichgewicht, siehe 17.8)

Ansonsten sind Wurzeln negativ:
oder komplex:

} In beiden Fällen gilt:

folglich:

$$\vec{x}^{(\alpha)}(t) \stackrel{(18.2)}{=} \operatorname{Re} \vec{X}^{(\alpha)}(t) \stackrel{(3)}{=} \vec{A}^{(\alpha)} e^{-i\omega_{(\alpha)} t} + \vec{A}^{(\alpha)*} e^{i\omega_{(\alpha)} t}$$

Sonderfall: $\omega^{(\alpha)} = 0$:

dann liefert (19.2)

$$\sum_j V_{ij} A_j^{(\alpha)} = 0 \quad (1)$$



$\Rightarrow$

Potential ändert sich nicht in $\vec{A}^{(\alpha)}$ -Richtung

(ist zu bestimmen)

Ansatz zur Lösung v. (18.1):

$$x_j(t) =$$

(2)

Eingesetzt:

$$\stackrel{(18.1)}{=} T_{ij} \ddot{x}_j + V_{ij} x_j$$

(3)

$$= T_{ij} + V_{ij}$$

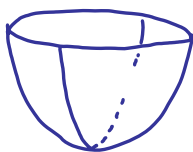
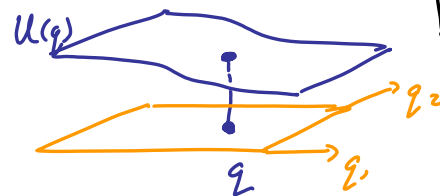
(4)

$$\Rightarrow f(t) =$$

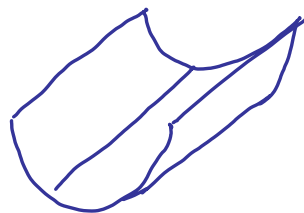
(5)

$\omega^{(\alpha)} = 0 \Rightarrow$ gleichförmige Bewegung in $A^{(\alpha)}$ -Richtung! (statt Oszillationen)

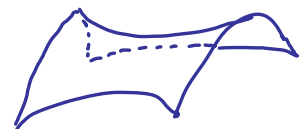
Beispiele für $f=z$:



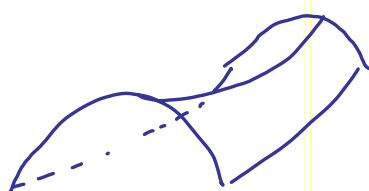
Minimum



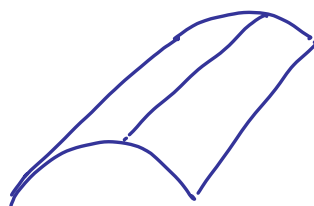
Rinne



Sattel



Sattel



Tunnel



Maximum