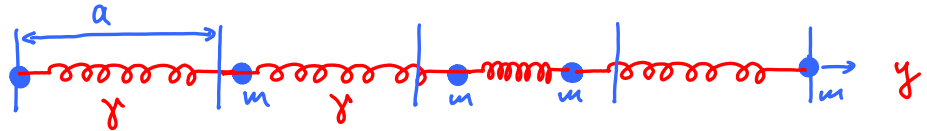


Ein-dimensionales Kristall-Modell

KSchw 22

Massen: m

Federkonstanten: γ



Gleichgewichtspositionen:

$$y_n^0 =$$

Auslenkungen: $x_n =$

(1)

Potentielle Energie:

$$V(\{x_n\}) =$$

(2)

Bewegungsgl. für n :

$$m \ddot{x}_n = - \frac{\partial V}{\partial x_n} =$$

(3)

N gekoppelte Gl.

f.d. N Funktionen $x_n(t)$

$$=$$

(4)

Rückstellkraft $\propto$ Streckung/Dehnung d. Feder:

falls > 0 :
Kraft nach

falls < 0 :
Kraft nach

Wir erwarten intuitiv Wellen als Lösungen. Für Welle mit Wellenlänge

KSchw 23

, gilt:

$$x_n(t) =$$

(1)



"Wellenvektor"

Lösungsansatz, der

(1) erfüllt:

$$x_n(t) =$$

mit

(2)

[Faktoriert t - und n -Abhängigkeit! Funktion $q_k(t)$ ist zu bestimmen].

Check (1):

$$x_n(t) = q_k(t) e^{i n a k}$$

(3)

Bewegungsgl. (2.4)

$$m \ddot{x}_n \stackrel{(2.4)}{=} - \gamma [2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}]$$

(4)

Ansatz (2) in (4):

$$=$$

(5)

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

$$=$$

(6)

Bew. Cgl. f. $q_k(t)$:
 HD mit Freq. ω_k !

K Schw 24

$$\ddot{q}_k(t) \stackrel{(24.6)}{=} \quad (1)$$

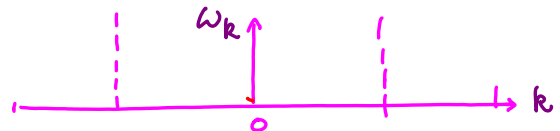
$$[1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x]$$

$$\omega_k^2 \stackrel{(24.6)}{=} \quad (2)$$

"Dispersionrelation":
 ("wie hängt Frequenz
 von Wellenvektor ab")

$$\omega_k = \quad (3)$$

ω_k ist periodisch in k ,
 mit Periode



Bereich v. $k \stackrel{(23.2)}{=} 2\pi/\lambda$, $\lambda = na$: $k \in$

[Alternativ wird oft benutzt: $k \in$]

Gesuchte Lösung v. (1) $q_k(t) =$

Gesuchte Lösung v. (2.4) $x_n(t) \stackrel{(23.2)}{=}$

Randbedingungen:

K Schw 25

1) Falls Enden "festgehalten" werden: $x_0(t) = x_N(t) = \quad (1)$

Hg. Lösung: $x_n(t) = q_k(t) \quad (2)$

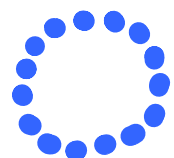
mit $\Rightarrow$ (3)

$\Rightarrow$ Nur bestimmte k -Werte sind möglich: Vielfache v. $\Delta k =$ "k-Quantelung"

Alternativ: (Ring-Geometrie)

2) Periodische Randbedingungen: $x_0(t) = \quad \neq t \quad (4)$

Hg. Lösung: $x_n(t) = q_k(t) \quad (5)$



mit

$\Rightarrow$ "k-Quantelung" (6)