

Kleine Schwingungen vieler Freiheitsgrade

(V6)

29.4.08

KSchw 10

Betrachte System mit f Freiheitsgraden: (z.B. N Teilchen in 3 Dim: $f = 3N$)

Koordinaten:

$$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^f \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_f) \quad \text{z.B. } (\tau_{1x}, \tau_{1y}, \tau_{1z}, \dots, \tau_{Nx}, \tau_{Ny}, \tau_{Nz}) \quad (1)$$

Geschwindigkeiten:

$$\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^f \quad \dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) \quad \text{Bilden 2f-dimensionalen "Phasenraum"} \quad (2)$$

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^f m_i \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} \dot{q}_i \hat{T}_{ij} \dot{q}_j = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 & \dots & \dot{q}_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T}_{11} & \dots & \hat{T}_{1f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{T}_{f1} & \dots & \hat{T}_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_f \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$T: \mathbb{R}^f \rightarrow \mathbb{R}$$

"Massenmatrix"

Diag. für cartesische Koord.

$$\hat{T}_{ij} = \begin{pmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_f \end{pmatrix} = \delta_{ij} m_j \quad (4)$$

Nebenbemerkung:

Bei fortgeschrittenen Anwendungen (Lagrange, verallgemeinerte Koordinaten), ist $\hat{T}_{ij}$ im allg. nicht-diag, aber stets symmetrisch, mit positiven Eigenwerten.

Wir betrachten hier jedoch nur den (naheliegenden) Fall, $\hat{T}_{ij} = m_i \delta_{ij}$.

Potentielle Energie:

$$U = U(q_1, \dots, q_f)$$

$$U: \mathbb{R}^f \rightarrow \mathbb{R}$$

(i) KSchw 11

Bewegungsgl:

$$m \ddot{q}_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (2)$$

Def:

Gleichgewichtslagen (Fixpunkte) sind zeitunabhängige Lösungen der Bewegungsgleichung:

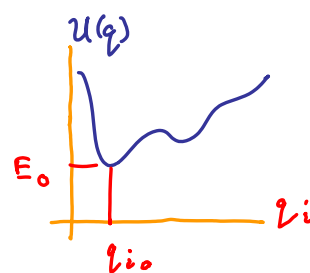
$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 = \text{konst.}, \quad \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad \ddot{\mathbf{q}} = 0 \quad (3)$$

Explizit:

$$q_i = q_{i0} = \text{konst.} \quad \forall i = 1, \dots, f \quad (4)$$

(3) in (2):

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_0 := \left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{\mathbf{q} = \mathbf{q}_0} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, f \quad (5)$$



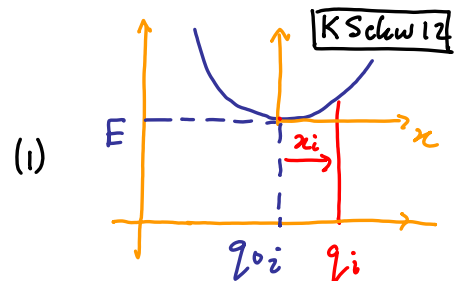
Energie am Fixpunkt:

$$E_0 = U(\mathbf{q}_0) \quad (6)$$

Umgebung eines Fixpunktes:

'Entwickle U um q_0 herum,'
[d.h. $x_i = q_i - q_{i0}$, etc.]

$$\left. \begin{aligned} x &= q - q_0 \\ \tilde{x} &= \dot{q} \end{aligned} \right\} \text{ seien klein}$$



Taylor-Entwicklung des Potentials in f Koordinaten bis zur quadratischen Ordnung in x :

$$U(q) = \begin{cases} (11.6) & E_0 = 0 \\ (11.5) & 0 \end{cases} U(q_0) + \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_0 x_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 x_i x_j \quad (2)$$

Höhere Terme vernachlässigbar bei kleinen Auslenkungen:

$$+ O(x^3) \quad (\text{enthält } x_i^3, x_i^2 x_j, \text{ etc.})$$

Ohne Verlust der Allgemeinheit wählen wir: $E_0 = 0, \quad q_0 = 0 = (0, 0, 0, \dots, 0) \quad (3)$

In Matrix-Notation:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i \hat{V}_{ij} x_j = \frac{1}{2} (x_1, \dots, x_f) \begin{pmatrix} V_{11} & \dots & V_{1f} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{f1} & \dots & V_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_f \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} x^T \hat{V} x$$

Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$m_i \ddot{q}_i \stackrel{(11.2)}{=} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \stackrel{(12.4)}{=} - \sum_{k=1}^f \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} = \delta_{ki} \quad (1)$$

$$m_i \ddot{x}_i = - \sum_j \hat{V}_{ij} x_j \quad (2)$$

In Matrixnotation:

$$\hat{T} \ddot{x} + \hat{V} x = 0 \quad (\text{Vergleiche Gl. 4.5}) \quad (3)$$

Gl. (3) sind f lineare, homogene Dgl. 2. Ordnung mit konst. Koeff.

Diese Vereinfachungen wurden erreicht durch Vernachlässigung der $O(x^3)$ -Terme!

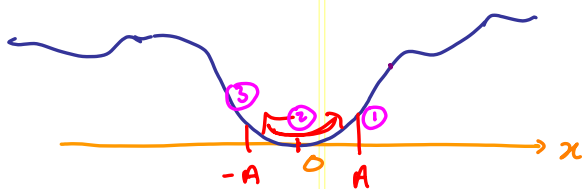
Beispiele: $f=1$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \Rightarrow T_{ij} \rightarrow m \quad (4)$$

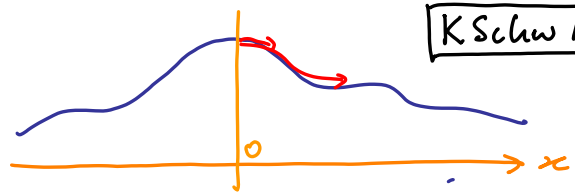
$$U(q) = U_0 + \frac{1}{2} k x^2 + o(x^3) \Rightarrow V_{ij} \rightarrow k \quad (5)$$

(3)

$$m \ddot{x} + k x = 0 \quad [\text{falls } k > 0: \text{HD mit } \omega_0 = \sqrt{k/m}] \quad (6)$$



$k > 0$ "stabiler Fixpunkt"



$k < 0$ "instabiler Fixpunkt"

$k > 0$:

Lösung: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta)$ (1)

$\dot{x}(t) = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$ (2)

Harmonische Näherung OK falls Amplitude klein bleibt:

$\frac{U(q) - U(q_0)}{U(q_0)} \ll 1 \Rightarrow \text{d.h. } (q \in [-A, A])$ (3)
 (Annahme: $U(q_0) \neq 0$).

Energie-Erhaltung:

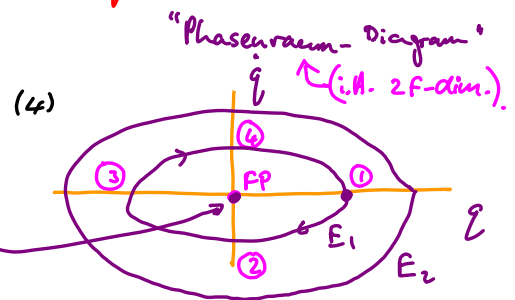
$a\dot{x}^2 + b y^2 = r$

System folgt Ellipse im $(q, \dot{q})$ -Phasenraum:

Konst. = $E(q, \dot{q})$

$= \frac{1}{2} m \dot{q}^2(t) + \frac{1}{2} k q^2(t)$

"Elliptischer Fixpunkt" (FP):
 $(q, \dot{q}) = (q_0, 0)$



$k < 0$:

Allg. Lösung:

$\begin{cases} \partial_x \cosh x = \sinh x \\ \partial_x \sinh x = \cosh x \end{cases}$

$\cosh x = \cos ix$

$\sinh x = -i \sin ix$

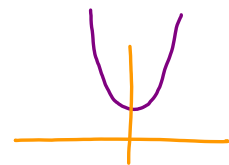
$\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$ (13.3) (1)

$q(t) = A \cosh(\omega_0 t + \delta)$

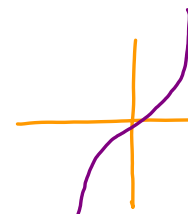
$\dot{q}(t) = A \omega_0 \sinh(\omega_0 t + \delta)$

$\ddot{q}(t) = A \omega_0^2 \cosh(\omega_0 t + \delta)$

KSchw 15



$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

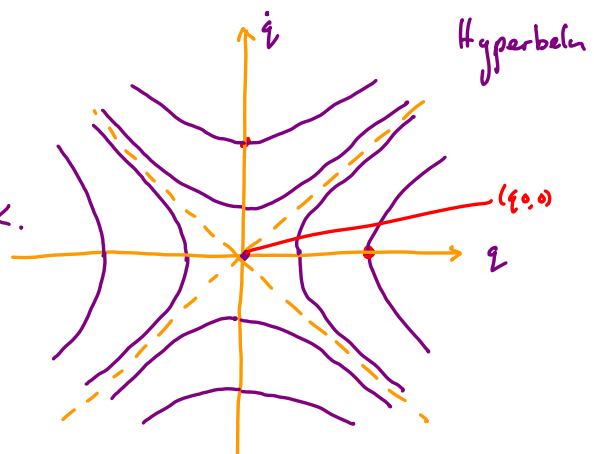


$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

System folgt Hyperbel im Phasenraum:

"Hyperbolischer Fixpunkt"

Harmonische Näherung nur für kurze Zeiten OK.
 $(\omega_0 t \ll 1)$

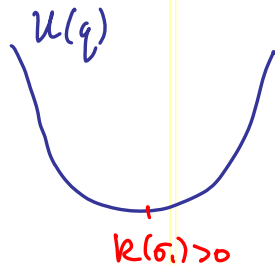
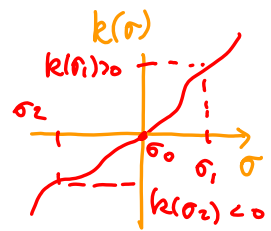


Betrachte $U = U(q, \sigma)$, mit σ = Verstellbarer Parameter

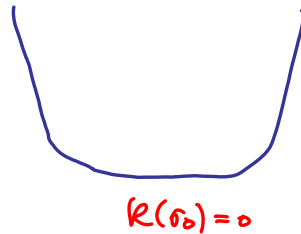
KSchw 16

Änderung v. σ kann Charakter des Fixpunkts ändern:

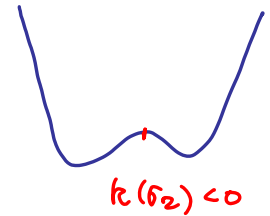
Harmonische Näherung: $U(q, \sigma) =$



stabiler
Fixpunkt



kritischer (oder marginaler)
Fixpunkt



instabiler
Fixpunkt

"Bifurkation"

Zurück zur
allg. Gleichung:

($\bar{z}$ ist
impliziert)

$$T_{ij} \ddot{x}_j + V_{ij} x_j \stackrel{(13.3)}{=} 0 \quad (1)$$

Bedingung für stabiles
Gleichgewicht:

$$U(q_0) < U(q_0 + x) \text{ f. alle genügend kleine } x \quad (2)$$

(12.2)
⇒

$$0 < \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i V_{ij} x_j \quad (3)$$

Kurznotation:
(Matrixmultiplikation ist implizit)

$$= \frac{1}{2} x^T \hat{V} x \quad (\dots) \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (4)$$

Transformiere zur
Eigenbasis von V:

$$= \frac{1}{2} x^T \underbrace{D D^{-1}}_{=1} \hat{V} \underbrace{D D^{-1}}_{=1} x \quad (5)$$

$$\hat{\tilde{V}} = D^{-1} \hat{V} D = \text{diagonal} = \begin{pmatrix} \cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \tilde{x}^T \hat{\tilde{V}} \tilde{x} \quad (\dots) \begin{pmatrix} \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\tilde{x} = D^{-1} x$$

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \underbrace{\tilde{V}_{ii}}_{\text{Diagonalelemente}} \tilde{x}_i^2 \Rightarrow \tilde{V}_{ii} > 0 \quad (7)$$

(3) erfordert: Eigenwerte v. $\hat{V}$ sind positiv! " $\hat{V}$ ist positiv-definite Matrix " (8a)

Ferner gilt auch allgemein: $\hat{T}$ ist positiv-definite Matrix (8b)

Allg. Lösungsverfahren
für Gl. (17.1);

$$T_{ij} \ddot{x}_j + V_{ij} x_j = 0$$

(1) KSchw 18

Komplexer Lösungs Ansatz:

Schreibe:

$$x(t) = \operatorname{Re}(X(t)), \quad \text{mit } X(t) = A e^{-i\omega t}$$

(2)

komplexer Spaltenvektor

$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_f \end{pmatrix}$

(Vorzeichen: meine Konvention)

und fordere

$$T_{ij} \ddot{X}_j + V_{ij} X_j = 0 \quad (3) \quad (\text{denn } \operatorname{Re}(3) \Rightarrow (1))$$

(2) in (3):

$$e^{-i\omega t} \sum_j (-\omega^2 T_{ij} + V_{ij}) A_j = 0 \quad (4)$$

Matrix-Notation für (4):

$$(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) A = 0 \quad (\text{Eigenwertproblem}) \quad (5)$$

Nicht-triviale Lösung
erfordert:

$$\det |\hat{V} - \omega^2 \hat{T}| = 0 \quad (6)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} P^f(\omega^2) = 0 \quad (7)$$

$$\left| \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \right|$$

charakteristisches Polynom:
(z.B. 5b.4)

Polynom von Grad f mit reellen Koeffizienten

Nullstellen von P^f , $\omega_{(\alpha)}^2$, $\alpha = 1, \dots, f$ sind "Eigenfrequenzen" von (18.5)
im Allgemeinen komplex

KSchw 19

Eigenvektoren $A^{(\alpha)}$ erfüllen die Gl: $\sum_j (V_{ij} - \omega_{(\alpha)}^2 T_{ij}) A_j^{(\alpha)} = 0 \quad (18.5) \quad (2)$

Entsprechende Lösung
v. (18.3) lautet: $X^{(\alpha)}(t) = A^{(\alpha)} e^{-i\omega_{(\alpha)} t}$ "Eigenmode, Eigenschwingung" (3)

(4)

$\hat{T}$ ist positiv-definit;
Falls auch $\hat{V}$ positiv-definit ist, $\left. \begin{array}{l} \text{dann} \\ \text{sind Wurzeln v. } P^f(\omega^2) \text{ positiv:} \end{array} \right\} \omega_{(\alpha)}^2 \geq 0, \Rightarrow \omega_{(\alpha)} = \text{real} \Rightarrow \bar{x}^{(\alpha)}(t) \approx \text{Oszillation} \Rightarrow (\text{stabiles GGW})$
(gilt für stabiles Gleichgewicht, siehe 17.8)

Ansonsten sind Wurzeln negativ: $\omega_{(\alpha)}^2 < 0$ oder komplex: $\operatorname{Im}(\omega_{(\alpha)}^2) \neq 0$ } In beiden Fällen gilt: $\operatorname{Im} \omega_{(\alpha)} \neq 0$
einige d. schreiben $\omega_{(\alpha)} = \omega_{(\alpha)}^R + i \omega_{(\alpha)}^I$
 $\omega_{(\alpha)}^R, \omega_{(\alpha)}^I \in \mathbb{R}$

folglich:

$$\bar{x}^{(\alpha)}(t) \stackrel{(18.2)}{=} \operatorname{Re} \bar{X}^{(\alpha)}(t) \stackrel{(3)}{=} \bar{A}^{(\alpha)} e^{-i\omega_{(\alpha)} t} + \bar{A}^{(\alpha)*} e^{i\omega_{(\alpha)} t}$$

$\sim e^{\omega_{(\alpha)}^I t} \quad \sim e^{-\omega_{(\alpha)}^I t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$

Sonderfall: $\omega^{(\alpha)} = 0$:

dann liefert (19.2)

$$\sum_j V_{ij} A_j^{(\alpha)} = 0 \quad (1)$$



$\Rightarrow$ Potential ändert sich nicht in $A^{(\alpha)}$ -Richtung

(ist zu bestimmen)

Ansatz zur Lösung v. (18.1): $x_j(t) = A_j^{(\alpha)} f(t)$ (2)

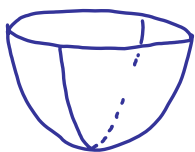
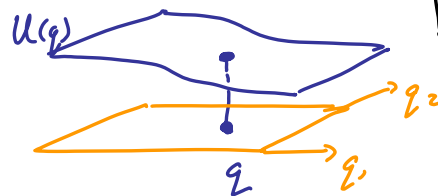
Eingesetzt: $0 \stackrel{(18.1)}{=} T_{ij} \ddot{x}_j + V_{ij} x_j$ (3)

$$= T_{ij} A_j^{(\alpha)} \ddot{f}(t) + \underbrace{V_{ij} A_j^{(\alpha)}}_{(1) = 0} f(t) \quad (4)$$

$$\Rightarrow f(t) = c_1 t + c_2 \quad (5)$$

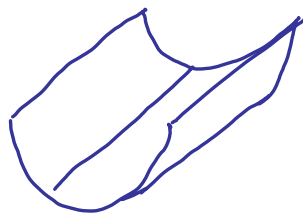
$\omega^{(\alpha)} = 0 \Rightarrow$ gleichförmige Bewegung in $A^{(\alpha)}$ -Richtung! (statt Oszillationen)

Beispiele für $f=z$:



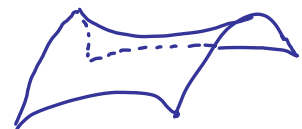
Minimum

$$\omega_{(1)}^2 > 0, \omega_{(2)}^2 > 0$$



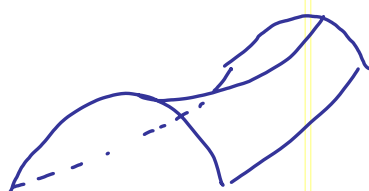
Rinne

$$\omega_{(1)}^2 > 0, \omega_{(2)}^2 = 0$$



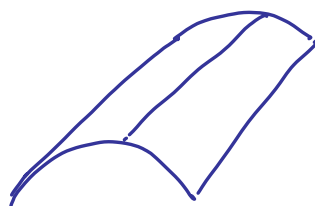
Sattel

$$\omega_{(1)}^2 > 0, \omega_{(2)}^2 < 0$$



Sattel

$$\omega_{(1)}^2 < 0, \omega_{(2)}^2 > 0$$



Tunnel

$$\omega_{(1)}^2 < 0, \omega_{(2)}^2 = 0$$



Maximum

$$\omega_{(1)}^2 < 0, \omega_{(2)}^2 < 0$$