Kleine Schwingungen vieler Freiheitsgrade (V6) 29.4.08 $\boxed{\text{KSchw 10}}$

Betrachte System mit f Freiheitsgraden: (z.B. N Teilchen in 3 Dim: $f = 3N$)

Koordinaten: $q = (q_1, \dots, q_f)$ z.B. $(r_{1x}, r_{1y}, r_{1z}, \dots, r_{Nx}, r_{Ny}, r_{Nz})$ (1)

Geschwindigkeiten: $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ (2)

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{f} m_i \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} \dot{q}_i \hat{T}_{ij} \dot{q}_j$ (3)

"Massenmatrix" $\hat{T}_{ij} = \begin{pmatrix} m_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_f \end{pmatrix} = \delta_{ij} m_j$ (4)

Nebenbemerkung:
Bei fortgeschrittenen Anwendungen (Lagrange, verallgemeinerte Koordinaten), ist $\hat{T}_{ij}$ im allg. nicht diag, aber stets symmetrisch, mit positiven Eigenwerten.
Wir betrachten hier jedoch nur den (naheliegensten) Fall, $\hat{T}_{ij} = m_i \delta_{ij}$.

$\boxed{\text{KSchw 11}}$

Potentielle Energie: $U = U(q_1, \dots, q_f)$ (1)

Bewegungsgl: $m \ddot{q}_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i}$ (2)

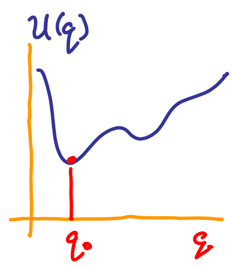
Def:

Gleichgewichtslagen (Fixpunkte) sind zeitunabhängige Lösungen der Bewegungsgleichung:

$q = q_0 = \text{konst}, \quad \dot{q} = 0, \quad \ddot{q} = 0$ (3)

Explizit: $q_i = q_{i0} \quad \forall\, i = 1, \dots, f$ (4)

(3) in (2): $\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_0 := \left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{q=q_0} = 0$ (5)



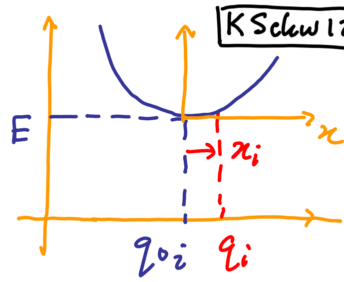
Energie am Fixpunkt: $E_0 = U(q_0)$ (6)

KSchw 12

Umgebung eines Fixpunktes:

'Entwickle $\mathcal{U}$ um q_0 herum"
[d.h. $x_i = q_i - q_{i0}$, etc.]

$$\left.\begin{array}{l} x = q - q_0 \\ \dot{x} = \dot{q} \end{array}\right\} \text{ seien klein} \qquad (x_1, \ldots, x_f) \qquad (1)$$



Taylor-Entwicklung des Potentials in f Koordinaten bis zur quadratischen Ordnung in x:

$$\mathcal{U}(q) = \Big\{ \underbrace{\mathcal{U}(q_0)}_{\overset{(11.6)}{\to} E_0 = 0} + \underbrace{\sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i}\right)_0}_{\overset{(11.5)}{=} 0} x_i + \frac{1}{2}\sum_{ij} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 x_i x_j \Big\} \qquad (2)$$

Hess-Matrix $:\equiv V_{ij}$

Höhere Terme vernachlässigbar bei kleinen Auslenkungen:

$$+\, \mathcal{O}(x^3) \qquad (\text{enthält } x_i^3,\ x_i^2 x_j, \text{ etc.})$$

Ohne Verlust der Allgemeinheit wählen wir: $E_0 = 0$, $q_0 = 0$ (3)

In Matrix-Notation:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\sum_{ij} x_i \hat{V}_{ij} x_j = -\frac{1}{2}(x_1, \ldots, x_f)\begin{pmatrix} V_{11} & \cdots & V_{1f} \\ \vdots & & \\ V_{f1} & \cdots & V_{ff}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_f\end{pmatrix} \qquad (4)$$

$$= \frac{1}{2} x^T V x$$

KSchw 13

Bewegungsgleichung:

$$m_i \ddot{q}_i \overset{(11.2)}{=} -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_k}}_{= \sum_j V_{kj} x_j} \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_i}}_{= \delta_{ki}} \qquad (1)$$

$$m_i \ddot{x}_i = -\sum_j \hat{V}_{ij} x_j \qquad (2)$$

In Matrixnotation:

$$\boxed{\hat{T}\ddot{\vec{x}} + \hat{V}\vec{x} = 0} \qquad (\text{Vergleiche Gl. 4.5}) \qquad (3)$$

Gl. (3) sind lineare, homogene DGL. 2. Ordnung mit konst. Koeff.
Diese Vereinfachungen wurden erreicht durch Vernachlässigung der $O(x^3)$-Terme!

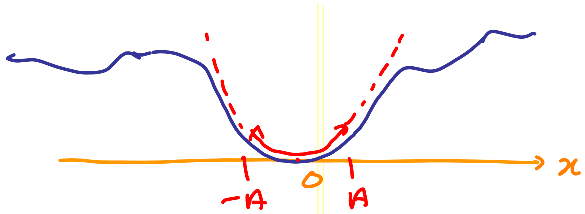
Beispiele: $f = 1$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \quad \Rightarrow \quad T_{ij} \to m \qquad (4)$$

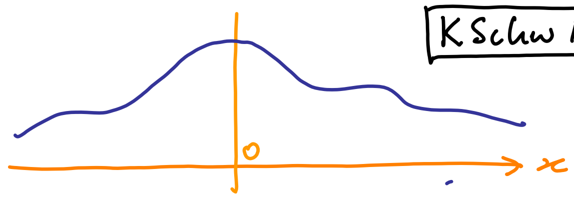
$$\mathcal{U}(q) = \mathcal{U}_0 + \frac{1}{2} k x^2 + O(x^3) \quad \Rightarrow \quad V_{ij} \to k \qquad (5)$$

(3) $\quad m\ddot{x} + kx = 0$ ✓ $\quad$ [Falls $k > 0$: HO mit $\omega_0 = \sqrt{k/m}$] (6)

KSchw 14



$k>0$: "stabiler Fixpunkt"



$k<0$: "instabiler Fixpunkt"

$k>0$:

Lösung:

$$x(t) = \underline{A}\cos(\omega_0 t + \underline{\delta}) \qquad (1)$$

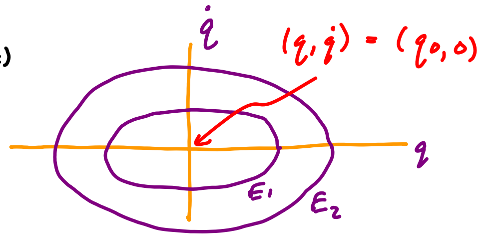
$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta) \qquad (2)$$

Harmonische Näherung OK falls Amplitude klein bleibt:

$$\frac{U(q) - U(q_0)}{U(q_0)} \ll 1 \quad \forall\, q(t) \quad \Rightarrow \quad (\text{d.h. } q \in [-A, A]) \qquad (3)$$

Energie-Erhaltung:

$$\text{konst.} = E(q,\dot{q}) = \tfrac{1}{2} m \dot{q}^2(t) + \tfrac{1}{2} k q^2(t) \qquad (4)$$



System folgt Ellipse im $(q,\dot{q})$-Phasenraum: "Elliptischer Fixpunkt"

KSchw 15

$k<0$: $(k = -\omega_0^2)$

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0 \qquad (13.3)$$

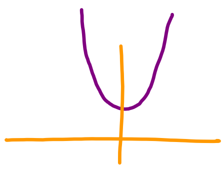
Allg. Lösung:

$$q(t) = A\cosh(\omega_0 t + \delta)$$

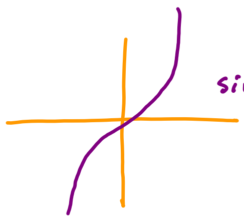
$$\left[\begin{array}{l} \partial_x \cosh x = \sinh x \\ \partial_x \sinh x = \cosh x \end{array}\right]$$

$$\dot{q}(t) = A\,\omega_0 \sinh(\omega_0 t + \delta)$$

$$\left.\begin{array}{l} |q| \\ |\dot{q}| \end{array}\right\} \xrightarrow{t\to\infty} \infty$$



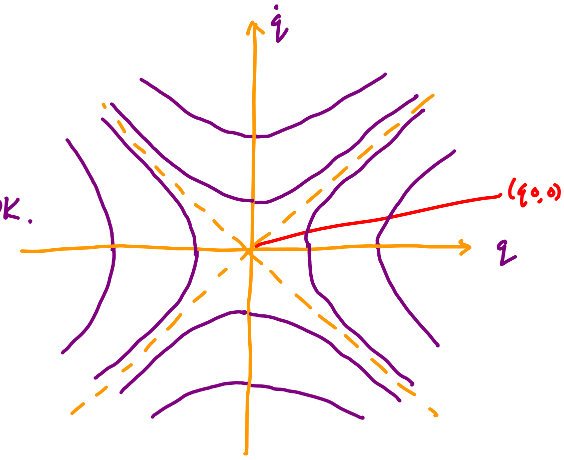
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

System folgt Hyperbel im Phasenraum: "Hyperbolischer Fixpunkt"

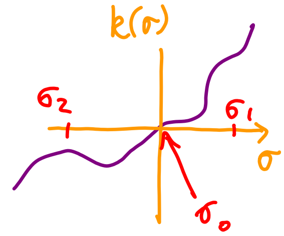
Harmonische Näherung nur für kurze Zeiten OK. $(\omega_0 t \lesssim 1)$



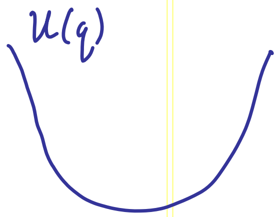
KSchw 16

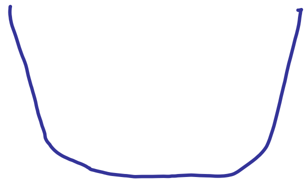
Betrachte $\mathcal{U} = \mathcal{U}(q, \sigma)$, mit σ = Verstellbarer Parameter

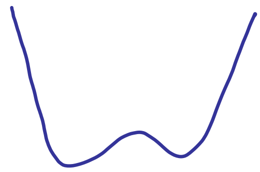
Änderung v. σ kann Charakter des Fixpunkts ändern:



Harmonische Näherung: $\mathcal{U}(q, \sigma) = \frac{1}{2} k(\sigma)\, x^2$







$k(\sigma_1) > 0$ — stabiler Fixpunkt

$k(\sigma_0) = 0$ — kritischer (oder marginaler) Fixpunkt

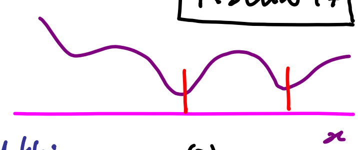
$k(\sigma_2) < 0$ — instabiler Fixpunkt

$\longrightarrow$ "Bifurkation"

KSchw 17

Zurück zur allg. Gleichung:

$$\left(\sum_j\right) T_{ij}\, \ddot{x}_j + V_{ij}\, x_j \overset{(13.3)}{=} 0 \qquad (1)$$



Bedingung für stabiles Gleichgewicht:

$$\mathcal{U}(q_0) < \mathcal{U}(q_0 + x) \quad \text{f. alle genügend kleine } x \qquad (2)$$

$$\overset{(12.2)}{\Longrightarrow} \quad 0 < \frac{1}{2} \sum_{ij} x_i V_{ij} x_j \qquad (3)$$

Kurznotation: (Matrixmultiplikation ist implizit)

$$= \frac{1}{2} \vec{x}^T \hat{V} \vec{x} \qquad (4)$$

Transformiere zur Eigenbasis von V:

$$= \underbrace{x^T D}\, \underbrace{D^{-1} V D}\, \underbrace{D^{-1} x} \qquad (5)$$

$$= \frac{1}{2} \tilde{x}^T \tilde{V} \tilde{x} \qquad (6)$$

diagonal

$\tilde{V} = D^{-1} V D$ = diagonal.

$\tilde{x} = D^{-1} x$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \tilde{V}_i \tilde{x}_i^2 \Rightarrow \tilde{V}_i > 0 \qquad (7)$$

(3) erfordert: Eigenwerte v. V sind positiv! "V ist positiv-definite Matrix" (8a)

Ferner gilt auch allgemein: $\hat{T}$ ist positiv-definite Matrix (8b)

Allg. Lösungsverfahren für Gl. (17.1):

$$T_{ij}\,\ddot{x}_j + V_{ij}\,x_j = 0 \qquad (1)$$

KSchw18

Komplexer Lösungs Ansatz:

Schreibe:

$$\vec{x}(t) = \mathrm{Re}\left[\vec{X}(t)\right], \quad \text{mit} \quad \vec{X}(t) = \vec{A}\, e^{-i\omega t} \qquad (2)$$

komplexer Spaltenvektor $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_f \end{pmatrix}$

(Vorzeichen: meine Konvention)

und fordere

$$T_{ij}\,\ddot{X}_j + V_{ij}\,X_j = 0 \qquad (3)$$

(dann: $\mathrm{Re}\,(3) \Rightarrow (1)$)

(2) in (3):

$$e^{-i\omega t} \sum_j \left(-\omega^2 T_{ij} + V_{ij}\right) A_j = 0 \qquad (4)$$

Matrix-Notation für (4):

$$\left(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}\right)\vec{A} = 0 \qquad \text{(Eigenwertproblem)} \qquad (5)$$

Nicht-triviale Lösung erfordert:

$$\underbrace{\det\left(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}\right)}_{} = 0 \qquad (6) \qquad \left| \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \ddots \end{pmatrix} \right|$$

charakteristisches Polynom: (z.B. 56.4)

$$\boxed{\equiv P^f(\omega^2) = 0} \qquad (7)$$

Polynom von Grad f mit reellen Koeffizienten

Nullstellen von $P^{(f)}$, $\omega^2_{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \dots, f$ sind "Eigenfrequenzen" von (18.5)

KSchw19

↑ im Allgemeinen komplex

Eigenvektoren $A^{(\alpha)}$ erfüllen die Gl:

$$\sum_j \left(V_{ij} - \omega^2_{(\alpha)} T_{ij}\right) A_j^{(\alpha)} \overset{(18.5)}{=} 0 \qquad (2)$$

Entsprechende Lösung v. (18.3) lautet:

$$\vec{X}^{(\alpha)}(t) = \vec{A}^{(\alpha)}\, e^{-i\omega_{(\alpha)} t} \qquad \text{"Eigenmode, Eigenschwingung"} \qquad (3)$$

(4)

$\hat{T}$ ist positiv-definit; (kann gezeigt werden!)

Falls auch $\hat{V}$ positiv-definit ist, sind Wurzeln v. $P^f(\omega^2)$ positiv:

(gilt für stabiles Gleichgewicht, siehe 17.8)

$$\omega^2_{(\alpha)} \geq 0, \quad \Rightarrow \omega_{(\alpha)} = \text{reell} \quad \Rightarrow \vec{x}^{(\alpha)}(t) \simeq \text{Oszillation}$$

$\Rightarrow$ (stabiles GGW) ✓

Ansonsten sind Wurzeln negativ: $\omega^2_{(\alpha)} < 0$

oder komplex: $\mathrm{Im}(\omega^2_{(\alpha)}) \neq 0$

In beiden Fällen gilt: $\mathrm{Im}\,\omega_{(\alpha)} \neq 0$

schreibe $\omega_{(\alpha)} = \omega^R_{(\alpha)} + i\,\omega^I_{(\alpha)}$

folglich:

$$\vec{x}^{(\alpha)}(t) \overset{(18.2)}{=} \mathrm{Re}\,\vec{X}^{(\alpha)}(t) \overset{(3)}{=} \vec{A}^{(\alpha)} \underbrace{e^{-i\omega_{(\alpha)} t}}_{\sim e^{\omega^I_{(\alpha)} t}} + \vec{A}^{(\alpha)*} \underbrace{e^{i\omega_{(\alpha)} t}}_{\sim e^{-\omega^I_{(\alpha)} t}} \xrightarrow{t \to \infty} \infty$$

instabiles GGW !!

Sonderfall: $\omega^{(\alpha)} = 0$:

KSchw20

dann liefert (19.2) $\qquad \sum_j V_{ij} A_j^{(\alpha)} = 0 \qquad (1)$

$\Rightarrow$ Potential ändert sich nicht in $\vec{A}^{(\alpha)}$ - Richtung

Ansatz zur Lösung v. (18.1): $\qquad x_j(t) = A_j^{(\alpha)} f(t) \qquad$ ← (ist zu bestimmen) $\qquad (2)$

Eingesetzt: $\qquad 0 \overset{(18.1)}{=} T_{ij} \ddot{x}_j + V_{ij} x_j \qquad (3)$

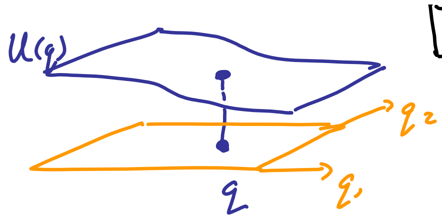
$$= T_{ij} A_j^{(\alpha)} f(t) + \underbrace{V_{ij} A_j^{(\alpha)}}_{(1)\ =0} f(t) \qquad (4)$$

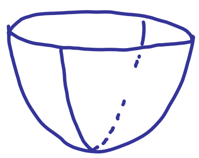
$$\Rightarrow \quad f(t) = c_1 t + c_2 \qquad (5)$$

$\omega^{(\alpha)} = 0 \Rightarrow$ gleichförmige Bewegung in $A^{(\alpha)}$ - Richtung! (statt Oszillationen)

Beispiele für $f = 2$:

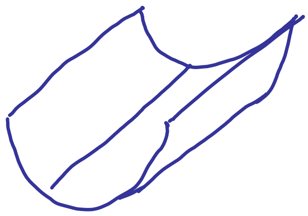
KSchw21





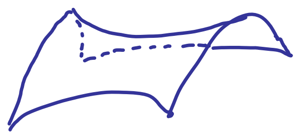
Minimum

$\omega_1^2 > 0, \quad \omega_2^2 > 0$



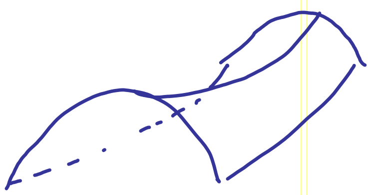
Rinne

$\omega_1^2 > 0, \quad \omega_2^2 = 0$



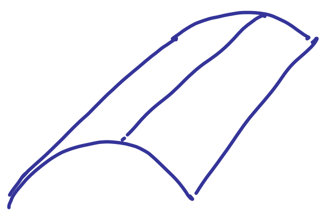
Sattel

$\omega_1^2 > 0, \quad \omega_2^2 < 0$



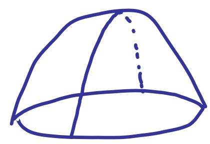
Sattel

$\omega_1^2 < 0, \quad \omega_2^2 > 0$



Tunnel

$\omega_1^2 < 0, \quad \omega_2^2 = 0$



Maximum

$\omega_1^2 < 0, \quad \omega_2^2 < 0$