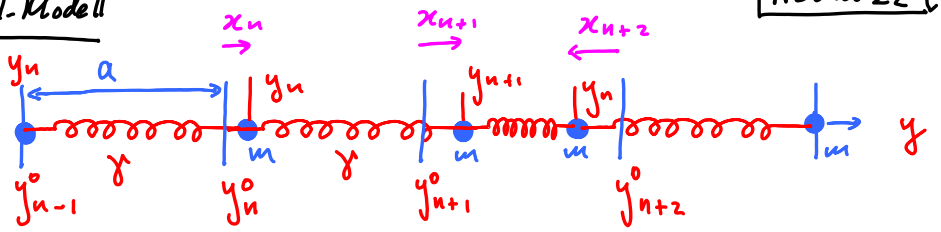
Ein-dimensionales Kristall-Modell

KSchw 22

Massen : m

Federkonstanten : γ



Gleichgewichtspositionen: $y_n^0 = na$, $n = 1, \dots, N$ Auslenkungen : $x_n = y_n - y_n^0$ (1)

Potentielle Energie : $V(\{x_n\}) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\gamma\,(x_{n+1}-x_n)^2$ (2)

Bewegungsgl. für n: $m\ddot{x}_n = -\frac{\partial V}{\partial x_n} = -\frac{\partial}{\partial x_n}\frac{1}{2}\gamma\left[(x_n-x_{n-1})^2 + (x_{n+1}-x_n)^2\right]$ (3)

N gekoppelte Gl.
f.d. N Funktionen $x_n(t)$

$$\boxed{m\ddot{x}_n = -\gamma\underbrace{(x_n - x_{n-1})} + \gamma\underbrace{(x_{n+1}-x_n)}} \quad (4)$$

Rückstellkraft ∝ Streckung/Dehnung d. Feder : falls >0 : Kraft nach links   falls >0 : Kraft nach rechts

---

KSchw 23

Wir erwarten intuitiv Wellen als Lösungen. Für Welle mit Wellenlänge $\lambda = ma$, gilt:

$$x_n(t) = x_{n+m}(t) \quad (1)$$

(m = 3)

Lösungsansatz, der (1) erfüllt:

$$x_n(t) = q_k(t)\, e^{inak}, \quad \text{mit } k = 2\pi/\lambda = \frac{2\pi}{ma} \quad (2)$$

"Wellenvektor"

[Faktorisiert t- und n-Abhängigkeit! Funktion $q_k(t)$ ist zu bestimmen].

Check (1):

$$x_{n+m}(t) = q_k(t)\, e^{inak}\underbrace{e^{imak}}_{=1} = x_n(t) \;\checkmark \quad (3)$$

Bewegungsgl. (22.4)

$$m\ddot{x}_n \overset{(22.4)}{=} -\gamma\left[2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}\right] \quad (4)$$

Ansatz (2) in (4):

$$m\ddot{q}_k \cancel{e^{inak}} = -\gamma\, q_k \cancel{e^{inak}}\left[2 - e^{iak} - e^{-iak}\right] \quad (5)$$

$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$

$$\ddot{q}_k = -q_k \underbrace{(\gamma/m)\,2(1-\cos ak)}_{\equiv\,\omega_k^2} \quad (6)$$

KSchw 24

Bew.-Gl. f. $q_k(t)$: HO mit Freq. ω_k!

$$\boxed{\ddot{q}_k(t) \overset{(24.6)}{=} -\omega_k^2\, q_k(t)} \qquad (1)$$

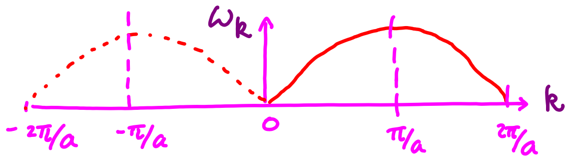
$$\left[1 - \cos 2x = 2\sin^2 x\right]$$

$$\omega_k^2 \overset{(24.6)}{=} 2\,\gamma/m\,(1 - \cos ak) = 4\,\gamma/m\,\sin^2 ak/2 \qquad (2)$$

"Dispersionsrelation": ("wie hängt Frequenz von Wellenvektor ab")

$$\boxed{\omega_k = \pm 2(\gamma/m)\sin ak/2} \qquad (3)$$

[ω_k ist periodisch in k, mit Periode $2\pi/a$]



Bereich v. $k \overset{(23.2)}{=} 2\pi/\lambda$, $\lambda = ma$: $\quad k \in \left(0, \frac{2\pi}{a}\right]$

[Alternativ wird oft benutzt: $k \in (-\pi/a, \pi/a]$]

Gesuchte Lösung v. (1) $\qquad q_k(t) = c_k \cos(\omega_k t + \phi)$

Gesuchte Lösung v. (22.4) $\qquad x_n(t) \overset{(23.2)}{=} \mathrm{Re}\left[q_k(t)\, e^{i n a k}\right]$

KSchw 25

Randbedingungen:

1) Falls Enden "festgehalten" werden: $\quad x_0(t) = x_N(t) = 0 \quad \forall\, t \qquad (1)$

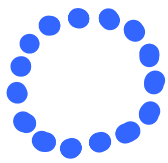
Allg. Lösung: $\qquad x_n(t) = q_k(t)\,\sin(n a k) \qquad (2)$

$$\text{mit} \quad \sin(\underbrace{Nak}_{m\pi}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = m\underbrace{\left(\frac{\pi}{Na}\right)}_{\Delta k}} \qquad (3)$$

$\Rightarrow$ Nur bestimmte k-Werte sind möglich: Vielfache v. $\Delta k = \frac{\pi}{Na}$ $\qquad$ "k-Quantelung"

Alternativ: (Ring-Geometrie)

2) Periodische Randbedingungen: $\quad x_0(t) = x_N(t) \quad \forall\, t \qquad (4)$



Allg. Lösung: $\qquad x_n(t) = q_k(t)\,\sin(n a k + \phi) \qquad (5)$

$$\text{mit} \quad \sin(\underbrace{Nak}_{2\pi m} + \phi) = \sin\phi \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = m\underbrace{\left(\frac{2\pi}{Na}\right)}_{\Delta k}} \qquad (6)$$

"k-Quantelung"