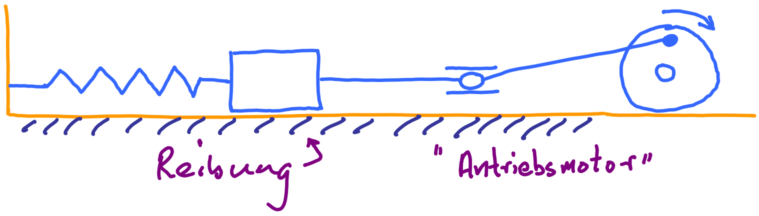
Erzwungene Schwingungen

V7 – 5.5.08

E Schw 1

Getriebener, gedämpfter harmonischer Oszillator



Bewegungsgl: (1)

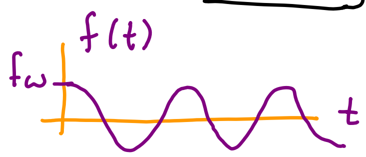
Reibung $(\lambda > 0)$ Eigenfrequenz $\omega_0 =$ "Antriebs-kraft"

Ziel: Lösung v. (1) für beliebige Antriebsfunktion $f(t)$!

Qualitatives Verständnis der Lösung.

Periodischer Antrieb:

E Schw 2



Betrachte: $f(t) =$ (1)

Bewegungsgl. (1.1): $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_\omega}{m}\cos\omega t$ (2)

[alle Größen in dieser Gl. sind reell]

Lösungsweg: komplexer

Ansatz: betrachte $\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{f_\omega}{m}$ (3)

gesuchte Funktion: $x(t) =$, (4) $\Rightarrow$

Allg. Form der Lösung: $X(t) = X_{hom}(t) + X_{par}(t)$ (5)

X_{hom}: Allgemeine Lösung d. homogenen DG (mit $f=0$)

X_{part}: Partikuläre (irgendeine Lösung) v. (2)

Partikuläre Lösung von (2.3):

ESchw 3

Nicht-homogene Dg: $\ddot{X}_{part} + 2\lambda \dot{X}_{part} + \omega_0^2 X_{part} = \frac{f_\omega}{m} e^{-i\omega t}$ (2.3)

Ansatz: $\boxed{X_{part}(t) = \qquad}$ (1)

(7.1) eingesetzt in (2.3): $\left[\qquad \right] = \frac{f_\omega}{m} e^{-i\omega t}$ (2)

"Dynamische Suszeptibilität": $\boxed{\chi(\omega) = \qquad}$ [$\chi(0) =$ "statische Susz."] (3)

Suszeptibilität $\stackrel{(1)}{=}$ $\frac{\text{Reaktion}}{\text{äußere Störung}} = \frac{\text{Auslenkung}}{\text{Antrieb}}$ (4)

Eigenschaften d. Suszeptibilität:

ESchw 4

$\chi(\omega) \equiv |\chi(\omega)| e^{-i\delta(\omega)} = \frac{1}{a + ib}$ (1)

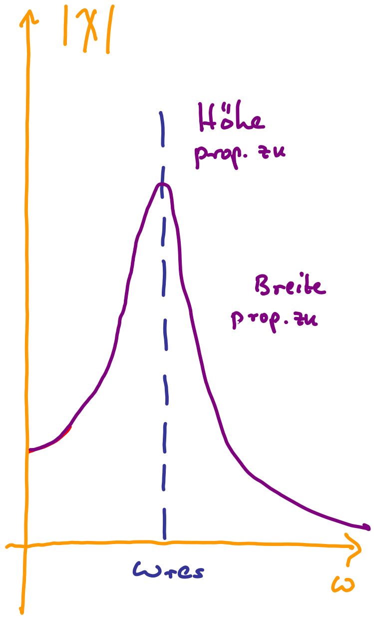
$a =$ $\qquad$ $b =$ (2)

Betrag: $|\chi| = \left[\frac{a^2 + b^2}{(a^2+b^2)^2} \right]^{1/2} = \frac{1}{[a^2+b^2]^{1/2}}$ (3)

$\boxed{|\chi| = \qquad}$ (4)

Resonanz-Frequenz:
[wo Nenner = minimal:]

$\boxed{\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}}$ (5)



Bei $\omega \simeq \omega_{res}$: $|\chi| \rightarrow$

$\rightarrow$ kleine $\qquad$ Kraft $\Rightarrow$ große Reaktion

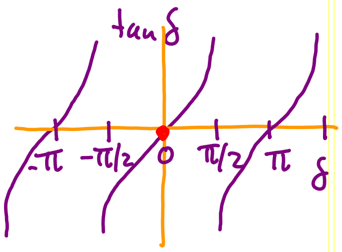
Phasenverschiebung

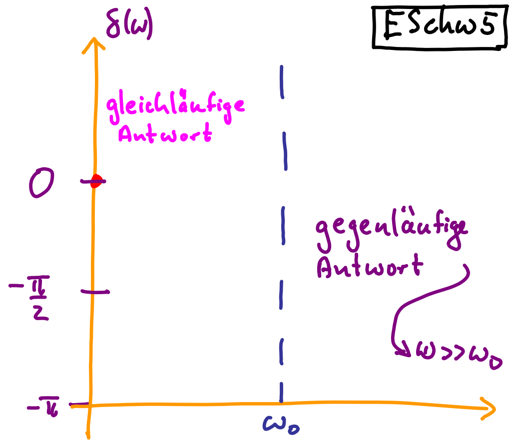
ESchw5

$$\boxed{\tan\delta(\omega) \overset{(4.1)}{=} \qquad\qquad}$$

$\omega < \omega_0$: $\tan\delta(\omega) < 0$,

$\omega > \omega_0$: $\tan\delta(\omega) > 0$,

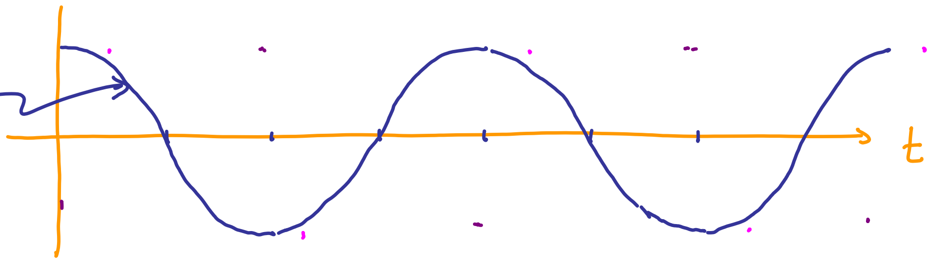




$$\mathrm{Re}\left[\chi(\omega)\, e^{-i\omega t}\right] =$$

$\mathrm{Re}\left[f_\omega e^{-i\omega t}\right]$

$= f_\omega \cos\omega t$



Zusammenfassung: erzwungene Schwingungen

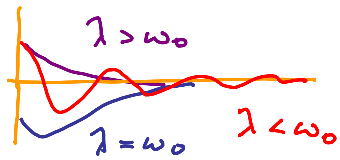
ESchw 6

Bewegungsgl.: $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_\omega}{m}\cos\omega t$ (1)

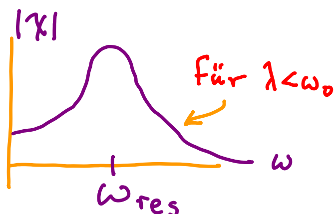
Komplexer Ansatz: $\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{f_\omega}{m} e^{-i\omega t}$ (2)

Allg. Form der Lösung: $X(t) = X_{hom}(t) + X_{par}(t)$ (3)

Homogene Lösung fällt exponentiell ab: $X_{hom}(t) = e^{-\lambda t}\ldots$ (4)



Partikuläre Lösung: (fällt nicht ab!) $X_{part}(t) = \frac{f_\omega}{m}\chi(\omega)\, e^{-i\omega t}$ (5)



"Dynamische Suszeptibilität": $\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\lambda}$ (6)

$= |\chi(\omega)|\, e^{i\delta(\omega)}$

Allgemeiner Antrieb: beliebige Funktion $f(t)$:

ESchw 7

Betrachte: $\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{f(t)}{m}$ (1)

Fourier-transformierte

$=$

Fourier-Ansatz für Antrieb: Physiker-Konvention (2)

Fourier-Ansatz für Lösung: $X(t) =$ (3)

(3) in (2): $[\partial_t^2 + 2\lambda\partial_t + \omega_0^2]$ $= \int \frac{d\omega}{2\pi}\frac{f_\omega}{m} e^{-i\omega t}$ (4)

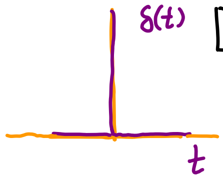
hängt nicht von t ab!

(1.3) gilt für beliebige t: $X_\omega =$ [eingesetzt in (2), liefert X_ω gesuchte Lösung $X(t)$] (5)

Dynamische Suszeptibilität: $\chi(\omega) = \frac{\text{Auslenkung}}{\text{Antrieb}} = \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-2i\lambda\omega}$ (6)

Einschub: δ-Delta-Funktion

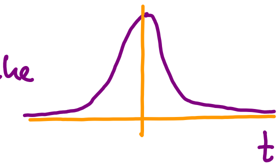
ESchw 8



Definierende Eigenschaft v. δ-Funktion: $\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \delta(t) f(t) =$ (1)

Eine mögliche Darstellung, Lorentz-Funktion: $\delta(t) =$ (2)

$\delta_\varepsilon(t)$



Normierung: $\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \delta_\varepsilon(t) =$ (3)

Integraldarstellung

Betrachte:

Dämpfungsfaktor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t - |\omega|\varepsilon} \quad (4)$$

$Re[e^{-i\omega t - |\omega|\varepsilon}]$

$$= \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\left[e^{-\omega[it+\varepsilon]} + e^{-\omega[-it+\varepsilon]}\right] \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{it+\varepsilon} + \frac{1}{-it+\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon/\pi}{\varepsilon^2+t^2} \quad (6)$$

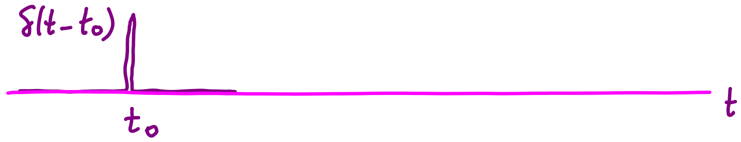
$\lim_{\varepsilon\to 0}$ (6) $\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(t)}$ (7)

Ende Einschub

ESchw 9

Antwort auf eine δ-Kraft: $f(t) = m\,\delta(t-t_0)$ (1)

Erwartete Lösung (qualitativ, für):



Fourier-Transf. des Antriebs:

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} f(t) \qquad \text{[Allgemeine Fourier-Rücktransf.]} \qquad (2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} \qquad (3)$$

Eingesetzt in (7.5)

$$X(\omega) \overset{(7.5)}{=} \frac{f_\omega/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega} \qquad (4)$$

mit Wurzeln: $\nu_\pm =$, mit $\tilde{\omega}_0 =$ (5)

Check:

$$-(\omega-\nu_-)(\omega-\nu_+) = -\left[\omega^2 - \omega(\nu_+ + \nu_-) + \nu_-\nu_+\right] = -\left[\omega^2 + 2i\lambda\omega + (-\tilde{\omega}_0 - i\lambda)(\tilde{\omega}_0 - i\lambda)\right]$$

$$= -\left[\omega^2 - 2i\lambda\omega - \tilde{\omega}_0^2 - \lambda^2\right] = -\omega^2 - 2i\lambda\omega + \omega_0^2 \;\checkmark \qquad (6)$$

ESchw 10

Lösung:

$$X(t) \overset{(7.3)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} X(\omega) \qquad (1)$$

$$\overset{(9.4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \qquad (2)$$

Integral lösen (mittels Bronstein):

für $\omega_0 > \lambda$:

$$\boxed{X(t) = \begin{cases} & \text{für } t \le t_0 \\ & \text{für } t > t_0 \end{cases}} \qquad (3)$$

= Skizze auf Seite 10

Fazit:

(7.1), mit Antrieb (9.1): $(\partial_t^2 + 2i\gamma\partial_t + \omega_0^2)X = \delta(t)$ (4)

hat die Lösung (für $\omega_0 > \lambda$):

$$X(t) \overset{(3)}{=} \begin{cases} 0 & \text{für} \\ \frac{1}{\tilde{\omega}_0} \sin\tilde{\omega}_0 t\; e^{-\lambda t} & \text{für} \end{cases} \qquad (5)$$

Antwort auf δ-Kraft wird "Greensche Funktion" genannt. Sie ist <u>sehr</u> nützlich! z.B., liefert formalen Ausdruck für Antwort auf beliebigen Antrieb.

Greensche Funktionen (GF): Ergänzende Bemerkungen

ESchw 11

Betrachte die inhomogene Differentialgleichung,

(1)

Differentialoperator

gesuchte Funktion

vorgegebene Funktion ("Inhomogener Term")

Satz: Sei $f_h(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung (2)

und $G(t)$ eine Lösung der Gleichung (3)

Dirac-δ-Funktion.

($G(t)$ wird die "Greensche Funktion von D_t" genannt).

Dann kann die allgemeine Lösung von (1) kann wie folgt geschrieben werden:

$f(t) =$ (4)

ESchw 12

"Beweis:" (11.4):

$$f(t) = f_h(t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \quad G(t-t')\,F(t') \quad (1)$$

[beachte die große Allgemeinheit: D_t, $g(t)$, sind beliebig!]

$$= \qquad + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \qquad F(t') \quad (2)$$

$$\overset{(8.1)}{=} \quad (3)$$

Bemerkungen:

- Sinn und Zweck von GF ist also: nützlich bei der Konstruktion allgemeiner Lösungen von inhomogenen Differentialgleichungen.
- Die Form der Green'schen Funktion wird über die definierende Gleichung (11.3) durch den Differentialoperator D_t und die Angabe von "Randbedingungen" bestimmt.
- Zwei beliebte Randbedingungen sind

" "Greensche f." : $G(t) = 0$ für (für T1 relevant) (4a)

" "Greensche f." : $G(t) = 0$ für (nur für Fortgeschrittene Anwendungen) (4b)

Alternative Bestimmung d. Greenschen Funktion für gedämpften HO :

E Schw 13

Definierende Gl.: $D_t\, G(t) = \delta(t)$, (1a) $\qquad D_t = \partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2$ (1b)

Ansatz: $G(t) =$ (2)

$D_t\, G(t) =$

① $= \partial_t^2 (\Theta g) \quad =$ (3)

$= \qquad\qquad =$ (4)

$\int dt'\, \delta(t') =$ (5) $\Rightarrow$ (6)

Partielle Integration

$\int dt\, g(t)\, \partial_t \delta(t) =$ (7) $\Rightarrow$ (8)

E Schw 14

② $= 2\gamma\partial_t (\Theta g) \quad =$ (1)

③ $= \omega_0^2 \,(\Theta g)$ (2)

① + ② + ③ : $\quad D_t(\Theta g) =$ (3)

$D_t(\Theta g) \overset{(13.1a)}{=}$ ist gewährleistet, wenn wir fordern:

Homogene DG für g: (i) $D_t g =$, $\Rightarrow$ $g(t) =$ (4)

Anfangsbedingungen für g:
(ii) $g(0) =$, $\Rightarrow$ (5)
(iii) $g'(0) =$. $\quad g'(t) =$ (6)

$\Rightarrow$

Lösung: $\boxed{G(t) \overset{(13.2),(4),(5),(6)}{=} \qquad\qquad}$ (7)