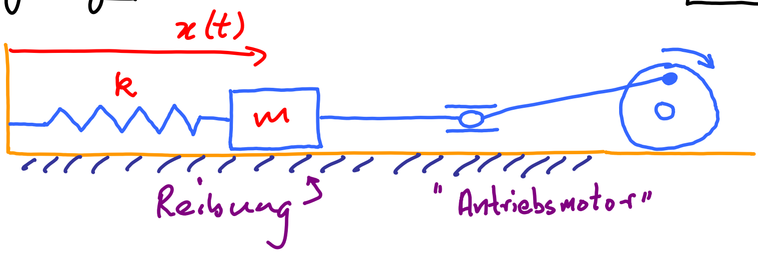
Erzwungene Schwingungen

V7 – 5.5.08

E Schw 1

Getriebener, gedämpfter harmonischer Oszillator



Bewegungsgl.: $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} f(t)$ (1)

Reibung $(\lambda > 0)$ Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ "Antriebs-kraft"

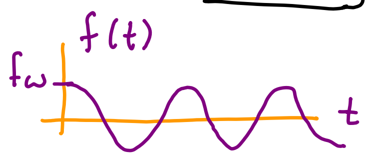
Ziel: Lösung v. (1) für beliebige Antriebsfunktion $f(t)$!

Qualitatives Verständnis der Lösung.

Periodischer Antrieb:

E Schw 2

Betrachte: $f(t) = f_\omega \cos\omega t$ (1)



Bewegungsgl. (1.1): $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_\omega}{m}\cos\omega t$ (2)

[alle Größen in dieser Gl. sind reell]

Lösungsweg: komplexer

Ansatz: betrachte $\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{f_\omega}{m} e^{-i\omega t}$ (3)

gesuchte Funktion: $x(t) = \mathrm{Re}[X(t)]$, (4) $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}(3) = (2)$

Allg. Form der Lösung: $X(t) = X_{hom}(t) + X_{par}(t)$ (5)

X_{hom}: Allgemeine Lösung d. homogenen DG (mit $f=0$) (siehe HO)

X_{part}: Partikuläre (irgendeine Lösung) v. (2)

Partikuläre Lösung von (2.3):

ESchw 3

Nicht-homogene Dg:
$$\underbrace{\ddot{X}_{part} + 2\lambda \dot{X}_{part} + \omega_0^2 X_{part}}_{D_t X_{part}(t)} = \frac{f_\omega}{m} e^{-i\omega t} \qquad (2.3)$$
$$,\quad D_t = \left(\partial_t^2 + 2\lambda\partial_t + \omega_0^2\right)$$

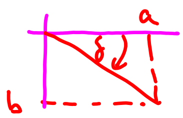
Ansatz:
$$\boxed{X_{part}(t) = \frac{f_\omega}{m}\chi(\omega)\, e^{-i\omega t}} \qquad \chi = \text{chi} \qquad (1)$$

(1) eingesetzt in (2.3):
$$\overbrace{\left[-\omega^2 - 2i\lambda\omega + \omega_0^2\right]\cancel{\frac{f_\omega}{m}}\chi(\omega)\cancel{e^{-i\omega t}}}^{D_t X_{part}} = \cancel{\frac{f_\omega}{m}}\cancel{e^{-i\omega t}} \qquad (2)$$

"Dynamische Suszeptibilität":
$$\boxed{\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\lambda}} \qquad \left[\chi(0) = \frac{1}{\omega_0^2} \text{ "statische Susz."}\right] \qquad (3)$$

Suszeptibilität $\overset{(1)}{=}$
$$\frac{\text{Reaktion}}{\text{äußere Störung}} = \frac{\text{Auslenkung}}{\text{Antrieb}} = \frac{X_{part}}{f_\omega/m\; e^{-i\omega t}} \qquad (4)$$

Eigenschaften d. Suszeptibilität:



ESchw 4

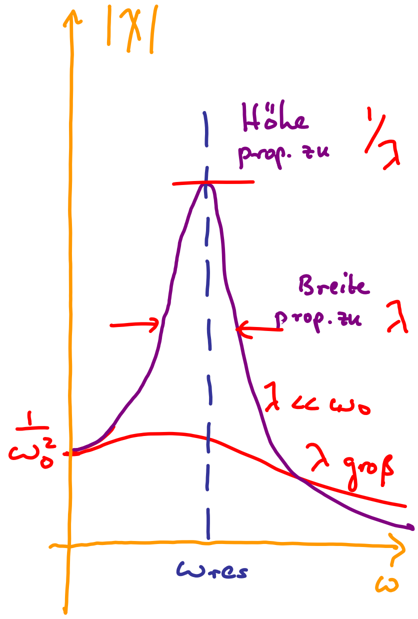
$$\tan\delta = \frac{b}{a}$$

$$\chi(\omega) \equiv |\chi(\omega)|\, e^{-i\delta(\omega)} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} \qquad (1)$$

$$a = \omega_0^2 - \omega^2 \qquad b = -2\lambda\omega \qquad (2)$$

Betrag:
$$|\chi| = \left[\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}\right]^{1/2} = \frac{1}{[a^2+b^2]^{1/2}} \qquad (3)$$

$$\boxed{|\chi| = \frac{1}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2\right]^{1/2}}} \qquad (4)$$



Resonanz-Frequenz:
[wo Nenner = minimal: $\partial_\omega(\text{Nenner}) = 0$]
$$\boxed{\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}} \qquad (5)$$

Bei $\omega \simeq \omega_{res}$: $|\chi| \to$ maximal

$\to$ kleine Antriebskraft $\Rightarrow$ große Reaktion

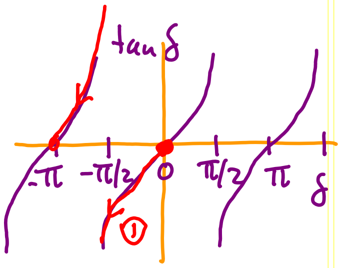
Phasenverschiebung

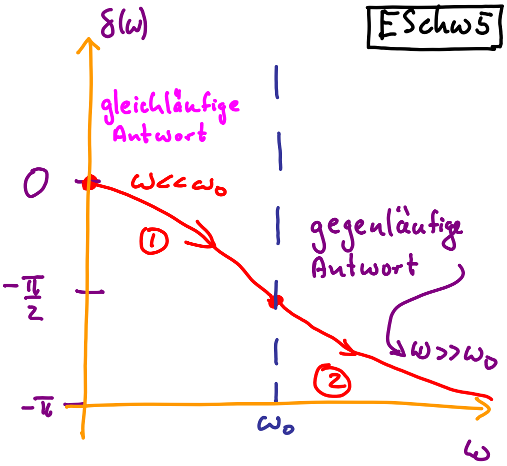
ESchw5

$$\boxed{\tan\delta(\omega) \overset{(4.1)}{=} b/a = \frac{2\omega\lambda}{\omega^2-\omega_0^2}}$$

$\omega<\omega_0$: $\tan\delta(\omega) < 0$, ①

$\omega>\omega_0$: $\tan\delta(\omega) > 0$, ②



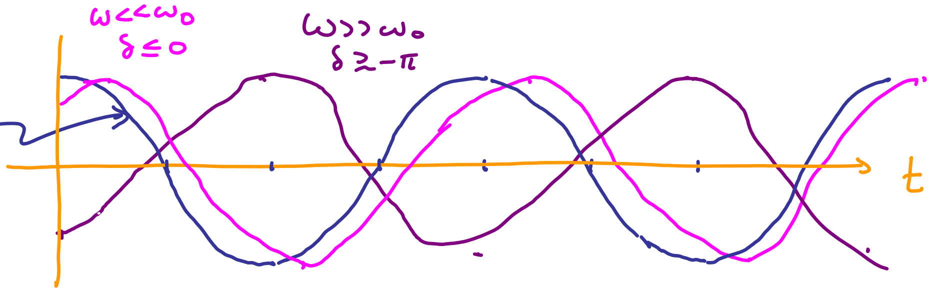


Re X(t) $\qquad |\chi| e^{-i\delta(\omega)}$

$$\mathrm{Re}\left[\chi(\omega)e^{-i\omega t}\right] = |\chi(\omega)| \cos(\omega t + \delta(\omega))$$

$\mathrm{Re}\left[f_\omega e^{-i\omega t}\right]$

$= f_\omega \cos\omega t$



Zusammenfassung: erzwungene Schwingungen mit per. Antrieb.

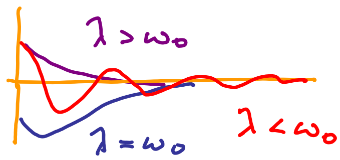
ESchw 6

Bewegungsgl.: $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_\omega}{m}\cos\omega t$ (1)

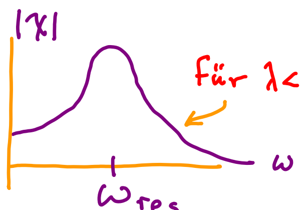
Komplexer Ansatz: $\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{f_\omega}{m} e^{-i\omega t}$ (2)

Allg. Form der Lösung: $X(t) = X_{hom}(t) + X_{par}(t)$ (3)

Homogene Lösung fällt exponentiell ab: $X_{hom}(t) = e^{-\lambda t}\ldots$ (4)



Partikuläre Lösung: (fällt nicht ab!) $X_{part}(t) = \frac{f_\omega}{m}\chi(\omega)e^{-i\omega t}$ (5)



"Dynamische Suszeptibilität": $\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-2i\omega\lambda}$ (6)

$= |\chi(\omega)|e^{i\delta(\omega)}$

Allgemeiner Antrieb: beliebige Funktion $f(t)$:

ESchw 7

Betrachte:
$$\ddot{X} + 2\lambda \dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{f(t)}{m} \qquad f(\omega) = f_\omega \qquad (1)$$
$$[\partial_t^2 + 2\lambda\partial_t + \omega_0^2]X$$

Fourier-Ansatz für Antrieb:
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{f_\omega}{m} e^{-i\omega t} \qquad (2)$$
Fourier-transformierte

Physiker-Konvention

Fourier-Ansatz für Lösung:
$$X(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} X_\omega e^{-i\omega t} \qquad (3)$$

(3) in (2):
$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \underbrace{[\partial_t^2 + 2\lambda\partial_t + \omega_0^2]}_{[-\omega^2 - 2\lambda i\omega + \omega_0^2]} \cancel{\int \frac{d\omega}{2\pi}} X_\omega e^{-i\omega t} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{f_\omega}{m} e^{-i\omega t} \qquad (4)$$
hängt nicht von t ab!

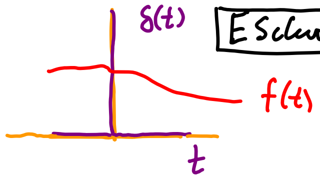
(11.3) gilt für beliebige t:
[oder: $\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega' t}$ (11.3)]
$$X_\omega = \frac{f_\omega/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega} \qquad (5)$$
[eingesetzt in (3), liefert X_ω gesuchte Lösung $X(t)$]

Dynamische Suszeptibilität:
$$\chi(\omega) = \frac{\text{Auslenkung}}{\text{Antrieb}} = \frac{X_\omega}{f_\omega/m} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega} = (6.6) ✓ \qquad (6)$$

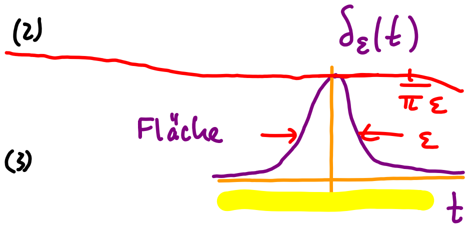
Einschub: δ-Delta-Funktion

ESchw 8

Definierende Eigenschaft v. δ-Funktion:
$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \delta(t) \underbrace{f(t)}_{\simeq f(0)} = f(0) \qquad (1)$$
$$= f(0) \overbrace{\int dt\, \delta(t)}^{=1}$$



Eine mögliche Darstellung, Lorentz-Funktion:
$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\frac{\varepsilon/\pi}{\varepsilon^2 + t^2}}_{= \delta_\varepsilon(t)} \qquad (2)$$

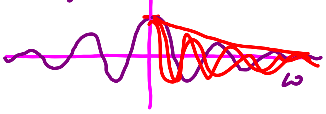


Normierung:
$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \delta_\varepsilon(t) = 1 ✓ \qquad (3)$$

Integraldarstellung

Betrachte:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \overbrace{e^{-|\omega|\varepsilon}}^{\text{Dämpfungsfaktor}} \qquad (4)$$

$\mathrm{Re}[e^{-i\omega t - |\omega|\varepsilon}]$



$$= \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[e^{-\omega[it+\varepsilon]} + e^{-\omega[-it+\varepsilon]}\right] \qquad (5)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{it+\varepsilon} + \frac{1}{-it+\varepsilon}\right] = \frac{\varepsilon/\pi}{\varepsilon^2+t^2} \overset{(2)}{=} \delta_\varepsilon(t) \qquad (6)$$

$\delta_\omega = 1$

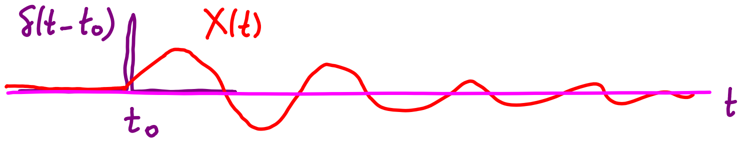
$\lim_{\varepsilon\to 0}$ (6)
$$\boxed{\delta(t) \overset{(2)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) \overset{(4)}{=} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t}} \qquad (7)$$

Ende Einschub

Antwort auf eine δ-Kraft: $\quad f(t) = m\,\delta(t-t_0) \quad (1)$

ESchw 9

Erwartete Lösung (qualitativ, für $\omega_0 > \gamma$):



Fourier-Trausf. des Antriebs:

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} f(t) \qquad \text{[Allgemeine Fourier-Rücktransf.]} \qquad (2)$$

$$\overset{(1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}\, m\,\delta(t-t_0) = m\, e^{i\omega t_0} \qquad (3)$$

Eingesetzt in (7.5):

$$\underbrace{X(\omega)}_{=X_\omega} \overset{(7.5)}{=} \frac{f_\omega/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega} = - \frac{e^{i\omega t_0}}{(\omega-\nu_+)(\omega-\nu_-)} \qquad (4)$$

mit Wurzeln:

$$\nu_\pm = \pm\varpi_0 - i\lambda, \quad \text{mit } \varpi_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} > 0 \qquad (5)$$

Check:

$$-(\omega-\nu_-)(\omega-\nu_+) = -\left[\omega^2 - \omega(\nu_+ + \nu_-) + \nu_-\nu_+\right] = -\left[\omega^2 + 2i\lambda\omega + (-\varpi_0 - i\lambda)(\varpi_0 - i\lambda)\right]$$

$$= -\left[\omega^2 - 2i\lambda\omega - \varpi_0^2 - \lambda^2\right] = -\omega^2 - 2i\lambda\omega + \omega_0^2 \quad \checkmark \qquad (6)$$

ESchw 10

Lösung:

$$X(t) \overset{(7.3)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} X(\omega) \qquad (1)$$

$$\overset{(9.4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \left[- \frac{e^{i\omega t_0}}{(\omega-\nu_+)(\omega-\nu_-)} \right] \qquad (2)$$

Integral lösen (mittels Bronstein):
für $\omega_0 > \lambda$:

$$\boxed{X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le t_0 \\ \frac{1}{2\varpi_0} \sin \varpi_0 (t-t_0)\, e^{-\lambda(t-t_0)} & \text{für } t > t_0 \end{cases}} \qquad (3)$$

= Skizze auf Seite 10

Fazit:

(7.1), mit Antrieb (9.1):

$$(\partial_t^2 + 2i\gamma\partial_t + \omega_0^2) X = \delta(t) \qquad (4)$$

hat die Lösung (für $\omega_0 > \lambda$):

$$g(t) =: X(t) \overset{(3)}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0 \\ \frac{1}{2\varpi_0} \sin \varpi_0 t\, e^{-\lambda t} & \text{für } t > 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Antwort auf δ-Kraft wird "Greensche Funktion" genannt. Sie ist <u>sehr</u> nützlich!
z.B., liefert formalen Ausdruck für Antwort auf beliebigen Antrieb.

Greensche Funktionen (GF): Ergänzende Bemerkungen

ESchw 11

Betrachte die inhomogene Differenzialgleichung,

$$\underbrace{D_t}_{\text{Differentialoperator}} \underbrace{f(t)}_{\text{gesuchte Funktion}} = \underbrace{F(t)}_{\text{vorgegebene Funktion ("Inhomogener Term")}} \quad (1)$$

Satz: Sei $f_h(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung $D_t f_h(t) = 0$ (2)

und $G(t)$ eine Lösung der Gleichung $D_t G(t) = \underbrace{\delta(t)}_{\text{Dirac-}\delta\text{-Funktion.}}$ (3)

($G(t)$ wird die "Greensche Funktion von D_t" genannt).

Dann kann die allgemeine Lösung von (1) kann wie folgt geschrieben werden:

$$f(t) = f_h(t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G(t-t') F(t') \quad (4)$$

ESchw 12

"Beweis:"

[beachte die große Allgemeinheit: D_t, $g(t)$, sind beliebig!]

$$\text{(11.4):} \quad D_t f(t) = \underbrace{D_t f_h(t)}_{(11.2)} + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \underbrace{D_t G(t-t')}_{(11.3)} F(t') \quad (1)$$

$$= 0 + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \delta(t-t') \, F(t') \quad (2)$$

$$\overset{(8.1)}{=} F(t) \checkmark \; (11.1) \quad (3)$$

Bemerkungen:

- Sinn und Zweck von GF ist also: nützlich bei der Konstruktion allgemeiner Lösungen von inhomogenen Differentialgleichungen.
- Die Form der Green'schen Funktion wird über die definierende Gleichung (11.3) durch den Differentialoperator D_t und die Angabe von "Randbedingungen" bestimmt.
- Zwei beliebte Randbedingungen sind

"retardierte" Greensche f. : $G(t) = 0$ für $t < 0$ (für T1 relevant) (4a)

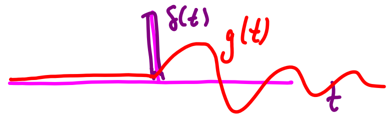
"avancierte" Greensche f. : $G(t) = 0$ für $t > 0$ (nur für Fortgeschrittene Anwendungen) (4b)

Alternative Bestimmung d. Greenschen Funktion für gedämpften HO :

Definierende Gl.: $D_t\, \mathcal{G}(t) = \delta(t)$, (1a) $\qquad D_t = \overset{①}{\partial_t^2} + \overset{②}{2\gamma\partial_t} + \overset{③}{\omega_0^2}$ (1b)

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \forall\ t>0 \\ 1/2 & \forall\ t=0 \\ 0 & \forall\ t<0 \end{cases}$$

Ansatz: $\mathcal{G}(t) = \Theta(t)\, g(t)$ (2)

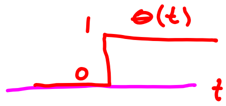


$D_t\, \mathcal{G}(t) =$

$$① = \underset{\partial_t\partial_t}{\partial_t^2}(\Theta g) = \partial_t[\overset{(6)\ \delta}{\dot\Theta}\, g + \Theta \dot g] \qquad (3)$$

$$= \underbrace{\dot\delta g}_{(8)\ = -\delta\dot g} + \delta\dot g + \delta\dot g + \Theta\ddot g = \delta\dot g + \Theta\ddot g \qquad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{t} dt'\, \delta(t') = \begin{cases} 1 & \text{falls } t>0 \\ 1/2 & \text{falls } t=0 \\ 0 & \text{falls } t<0 \end{cases} =: \Theta(t) \quad (5) \quad \Rightarrow \quad \partial_t(5):\ \delta(t) = \dot\Theta \quad (6)$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, g(t)\, \partial_t \delta(t) \overset{\text{Partielle Integration}}{=} -\int_{-\infty}^{\infty} dt\, (\partial_t g(t))\, \delta(t) \quad (7) \quad \Rightarrow \quad g\dot\delta = -\dot g\delta \quad (8)$$

$+ \; g(t)\,\delta(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$ denn $\delta(\pm\infty) = 0$.

$$② = 2\gamma\partial_t(\Theta g) = 2\gamma[\delta g + \Theta\dot g] \qquad (1)$$

$$③ = \omega_0^2(\Theta g) = \omega_0^2\,\Theta g \qquad (2)$$

$$① + ② + ③:\quad D_t(\Theta g) = \delta\dot g + 2\gamma\overbrace{\delta g}^{\delta(t)g(t) = g(0)} + \Theta\overbrace{(\ddot g + 2\gamma\dot g + \omega_0^2 g)}^{(13.1b)\ D_t g} \qquad (3)$$

$D_t(\Theta g) \overset{(13.1a)}{=} \delta$ ist gewährleistet, wenn wir fordern:

Homogene DG für g: (i) $D_t g = 0$, $\overset{\text{für } \omega_0>\gamma}{\Rightarrow}$ $g(t) = A e^{-\gamma t}\sin(\tilde\omega_0 t + \varphi)$, $\quad \tilde\omega_0 = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$ (4)

Anfangsbedingungen für g:

(ii) $g(0) = 0$, $\Rightarrow \varphi = 0$ (5)

(iii) $\dot g(0) = 1$. $\quad \dot g(t) = -\gamma g(t) + A e^{-\gamma t}\tilde\omega_0 \cos\tilde\omega_0 t$ (6)

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\tilde\omega_0}$$

Lösung:
$$\boxed{\mathcal{G}(t) \overset{(13.2),(4),(5),(6)}{=} \Theta(t)\,\frac{1}{\tilde\omega_0}\,e^{-\gamma t}\sin\tilde\omega_0 t} = (10.3) \qquad (7)$$