

Gedämpfter Harmonischer Oszillator (Wiederholung aus E1, Selbststudium)

HO1

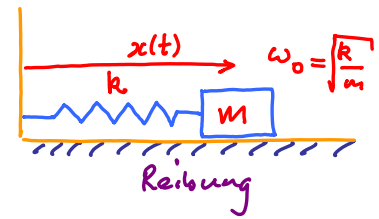
(V7) 5.5.08

Bewegungsgl:

$$m\ddot{x} = -kx - 2\lambda m\dot{x} \quad (a)$$

Rückstellkraft $\rightarrow$ Reibungskraft

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$



Lösungsansatz:

$$x(t) = \text{Re}[X(t)], \quad X(t) = C e^{-i\nu t} \quad (2)$$

eingesetzt in (1):

$$\left[(-i\nu)^2 - 2i\nu\lambda + \omega_0^2 \right] C e^{-i\nu t} = 0 \quad (3)$$

Aufgelöst nach ν :

$$\nu_{\pm} = \pm \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}_{\omega_0} - i\lambda = \pm \omega_0 - i\lambda \quad (4)$$

Wir unterscheiden 3 Fälle:

1.) $\omega_0 > \lambda$

Gedämpfte periodische Bewegung

2.) $\omega_0 < \lambda$

Exponentiell abfallende Bewegung

3.) $\omega_0 = \lambda$

Grenzfall aperiodischer Bewegung

1.) $\omega_0 > \lambda \Rightarrow \omega_0 = \text{reell}$

(1)

HO2

Lösung:

$$x(t) \stackrel{(3.2)}{=} \text{Re} \left[\overset{|C_-|e^{-i\alpha}}{C_-} e^{-i\omega_0 t - \lambda t} + \overset{|C_+|e^{+i\alpha}}{C_+} e^{+i\omega_0 t - \lambda t} \right] \quad (2)$$

2 Integrationskonstanten

$$C_{\pm} := \frac{|C|}{2} e^{\pm i\alpha}$$

oder

$$A_1 = |C| \cos \alpha$$

$$A_2 = -|C| \sin \alpha \quad (3)$$

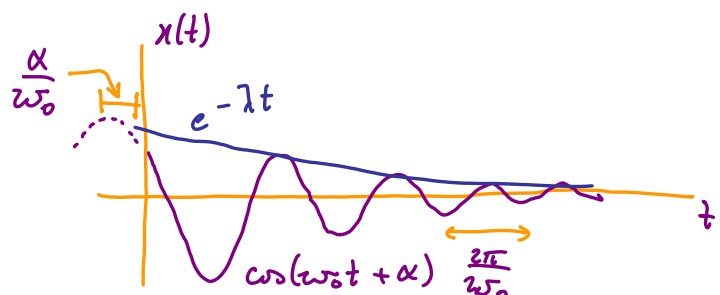
Lösung:

$$x(t) = e^{-\lambda t} |C| \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (4)$$

$$= e^{-\lambda t} [A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t] \quad (5)$$

Charakterisierung: $\omega_0 > \lambda$:

Gedämpfte periodische Bewegung



2. $\omega_0 < \lambda$:

$$\pm \omega_0 \stackrel{(1.4)}{=} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \pm i \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad (1) \quad \boxed{H03}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \pm i \frac{\omega_0}{\omega_0} \quad (\omega_0 < \lambda) \quad \text{imaginär} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \nu_{\pm} \stackrel{(3.4)}{=} \pm \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}_{\omega_0} - i\lambda = -i(\pm \omega_0 + \lambda) = -i \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases} \quad (3)$$

($\lambda_1, \lambda_2 > 0$, denn $\omega_0 < \lambda$)

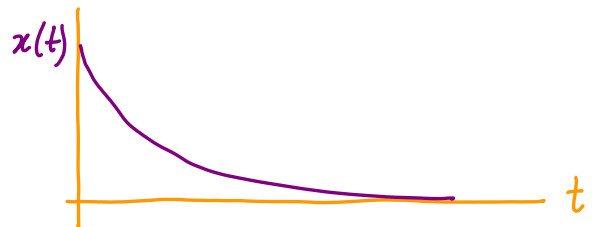
(2) in (1.2):
Lösung:

$$x(t) = A e^{-\lambda_1 t} + B e^{-\lambda_2 t} \quad (4)$$

2 Integrationskonstanten

Charakterisierung: $\omega_0 < \lambda$:

Exponentiell abfallende Bewegung



3. $\lambda = \omega_0$

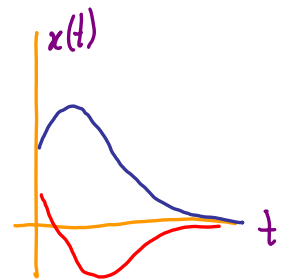
$$\nu_{\pm} \stackrel{(3.4)}{=} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} - i\lambda = -i\lambda \quad (1) \quad \boxed{H04}$$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\lambda t} \quad (2)$$

2 Integrationskonstanten

(beachte den Term linear in t!)



Charakterisierung: Grenzfall aperiodischer Bewegung

Check:

$$\ddot{x} + 2\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3)$$

$\partial_t (2)$:

$$\dot{x} = e^{-\lambda t} \{ B - \lambda A - \lambda Bt \} \quad (4)$$

$\partial_t (3)$:

$$\ddot{x} = e^{-\lambda t} \{ -\lambda B - \lambda B + \lambda^2 A + \lambda^2 Bt \} \quad (5)$$

Eingesetzt in (1.2)

mit $\omega_0 = \lambda$:

$$e^{-\lambda t} \left[Bt(\lambda^2 - 2\omega_0\lambda + \omega_0^2) + (\lambda^2 A - 2\lambda B) + 2\omega_0(B - \lambda A) + \omega_0^2 A \right] = 0 \quad (6)$$

✓

Zusammenfassung:

Wurzeln des charakteristischen Polynoms:

$$-\omega^2 - 2i\nu\lambda + \omega_0^2 = 0$$

①: $\omega_0 > \lambda$:

$$\nu_{\pm} = \pm \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}_{\omega_0 > 0} - i\lambda = \pm \omega_0 - i\lambda$$

②: $\omega_0 < \lambda$:

$$\nu_{\pm} = -i \left(\pm \underbrace{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}}_{\omega_0} + \lambda \right) = -i \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases}$$

③: $\omega_0 = \lambda$:

