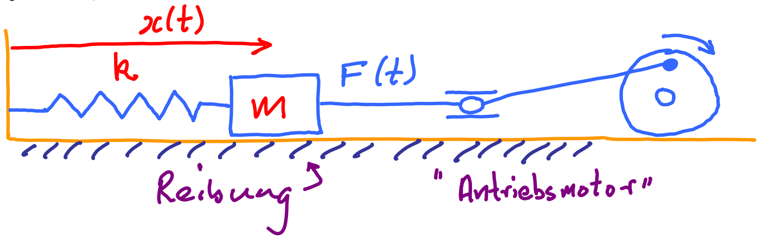
Erzwungene Schwingungen

V7 – 5.5.08

E Schw 1

Getriebener, gedämpfter harmonischer Oszillator



Bewegungsgl.: $$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} f(t) \qquad (1.1)$$

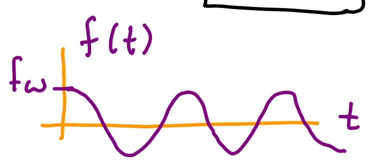
Reibung ($\lambda > 0$) — Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — "Antriebs=kraft"

Ziel: Lösung v. (1.1) für beliebige Antriebsfunktion $f(t)$!

Qualitatives Verständnis der Lösung.

Periodischer Antrieb:

E Schw 2



Betrachte: $$f(t) = f_\omega \cos\omega t \qquad (1)$$

Bewegungsgl. (1.1): $$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_\omega}{m}\cos\omega t \qquad (2)$$

[alle Größen in dieser Gl. sind reell]

Lösungsweg: komplexer

Ansatz: betrachte $$\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{f_\omega}{m} e^{-i\omega t} \qquad (3)$$

gesuchte Funktion: $x(t) = \mathrm{Re}[X(t)]$, (4) $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}(3) = \mathrm{Re}(2)$

Allg. Form der Lösung: $$X(t) = X_{hom}(t) + X_{par}(t) \qquad (5)$$

X_{hom}: Allgemeine Lösung d. homogenen DG (mit $f=0$)

X_{part}: Partikuläre (irgendeine Lösung) v. (2)

Partikuläre Lösung von (2.3):

ESchw 3

Nicht-homogene Dg: $$\ddot{X}_{part} + 2\lambda \dot{X}_{part} + \omega_0^2 X_{part} = \frac{f_\omega}{m} e^{-i\omega t} \qquad (2.3)$$

Ansatz: $$\boxed{X_{part}(t) = \frac{f_\omega}{m} \chi(\omega)\, e^{-i\omega t}} \qquad (1)$$

(7.1) eingesetzt in (2.3):

$$\left[-\omega^2 - 2\lambda i\omega + \omega_0^2\right] \cancel{\frac{f_\omega}{m}} \chi(\omega)\, \cancel{e^{-i\omega t}} = \cancel{\frac{f_\omega}{m}}\, \cancel{e^{-i\omega t}} \qquad (2)$$

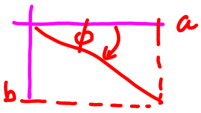
"Dynamische Suszeptibilität":

$$\boxed{\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega\lambda}} \qquad \left[\chi(0) = \frac{1}{\omega_0^2} \text{ "statische Susz."}\right] \qquad (3)$$

Suszeptibilität $\overset{(1)}{=}$ $\dfrac{\text{Reaktion}}{\text{äußere Störung}} = \dfrac{\text{Auslenkung}}{\text{Antrieb}}$ $\leftarrow \dfrac{X_{part}}{\frac{f_\omega}{m} e^{-i\omega t}}$ (4)

Eigenschaften d. Suszeptibilität:

ESchw 4



$$\chi(\omega) \equiv |\chi(\omega)|\, e^{-i\delta(\omega)} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \qquad (1)$$

$$a = \omega_0^2 - \omega^2 \qquad b = -2\lambda\omega \qquad (2)$$

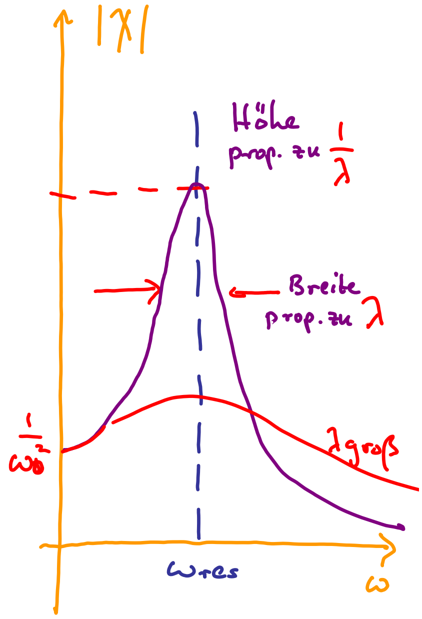
Betrag: $$|\chi| = \left[\frac{a^2 + b^2}{(a^2+b^2)^2}\right]^{1/2} = \frac{1}{[a^2+b^2]^{1/2}} \qquad (3)$$

$$\boxed{|\chi| = \frac{1}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2\right]^{1/2}}} \qquad (4)$$

Resonanz-Frequenz:

[wo Nenner = minimal: $\partial_\omega(\text{Nenner}) = 0$]

$$\boxed{\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}} \qquad (5)$$



Bei $\omega \simeq \omega_{res}$: $|\chi| \rightarrow$ maximal

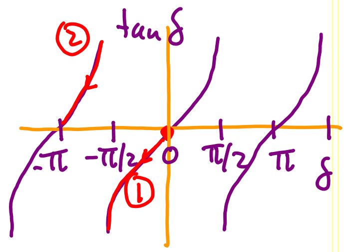
$\rightarrow$ kleine Antriebskraft $\Rightarrow$ große Reaktion

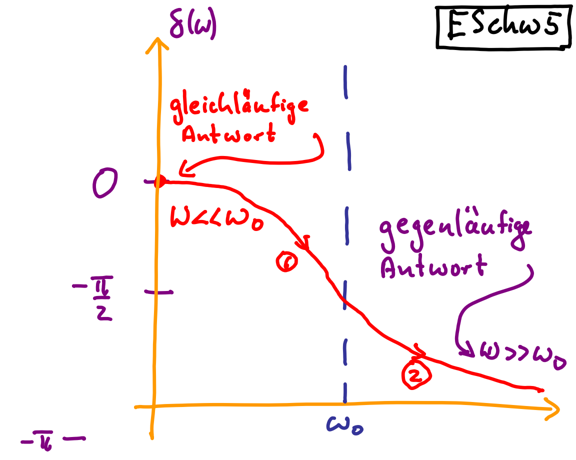
Phasenverschiebung

$$\boxed{\tan\delta(\omega) \overset{(4.1)}{=} \frac{b}{a} = \frac{2\omega\lambda}{\omega^2-\omega_0^2}}$$

$\omega<\omega_0$: $\tan\delta(\omega) < 0$, ①

$\omega>\omega_0$: $\tan\delta(\omega) > 0$, ②



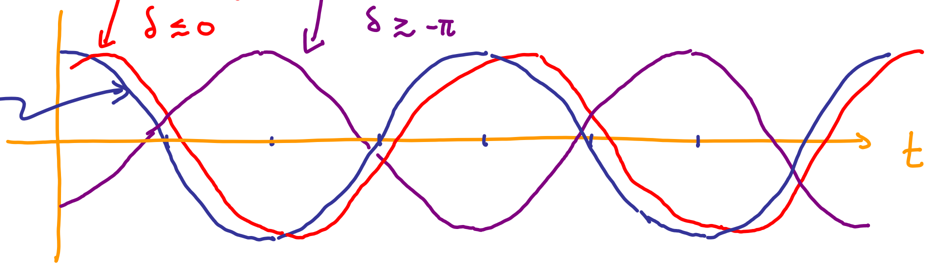


$$\underbrace{|\chi|e^{-i\delta(\omega)}}$$

$$\mathrm{Re}\left[\chi(\omega)\,e^{-i\omega t}\right] = |\chi(\omega)|\cos(\omega t + \delta(\omega))$$

$\omega \ll \omega_0$, $\delta \lesssim 0$ $\qquad$ $\omega \gg \omega_0$, $\delta \gtrsim -\pi$

$\mathrm{Re}\left[f_\omega e^{-i\omega t}\right]$
$= f_\omega \cos\omega t$



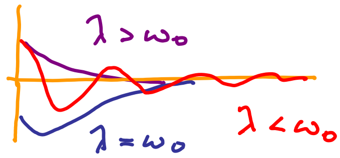
Zusammenfassung: erzwungene Schwingungen

Bewegungsgl.: $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_\omega}{m}\cos\omega t$ (1)

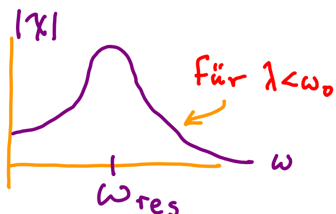
Komplexer Ansatz: $\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{f_\omega}{m}e^{-i\omega t}$ (2)

Allg. Form der Lösung: $X(t) = X_{hom}(t) + X_{par}(t)$ (3)

Homogene Lösung fällt exponentiell ab: $X_{hom}(t) = e^{-\lambda t}\ldots$ (4)



Partikuläre Lösung: (fällt nicht ab!) $X_{part}(t) = \frac{f_\omega}{m}\chi(\omega)e^{-i\omega t}$ (5)



"Dynamische Suszeptibilität": $\chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-2i\omega\lambda}$ (6)

$= |\chi(\omega)|e^{i\delta(\omega)}$

Allgemeiner Antrieb: beliebige Funktion $f(t)$:

ESchw 7

Betrachte:

$$\ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X = \frac{f(t)}{m} \quad (1)$$

$$\left[\partial_t^2 + 2\lambda\partial_t + \omega_0^2\right] X$$

Fourier-Ansatz für Antrieb:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{f_\omega}{m} e^{-i\omega t} \quad (2)$$

Fourier-transformierte

Physiker-Konvention

Fourier-Ansatz für Lösung:

$$X(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} X_\omega \, e^{-i\omega t} \quad (3)$$

(3) in (2):

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} \underbrace{\left[\partial_t^2 + 2\lambda\partial_t + \omega_0^2\right]}_{\left[-\omega^2 - 2\lambda i\omega + \omega_0^2\right]} \cancel{\int \frac{d\omega}{2\pi}} X_\omega e^{-i\omega t} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{f_\omega}{m} e^{-i\omega t} \quad (4)$$

hängt nicht von t ab!

(1.3) gilt für beliebige t:

$$X_\omega = \frac{f_\omega/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega} \quad (5)$$

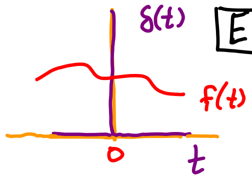
[eingesetzt in (2), liefert X_ω gesuchte Lösung $X(t)$]

Dynamische Suszeptibilität:

$$\chi(\omega) = \frac{\text{Auslenkung}}{\text{Antrieb}} = \frac{X_\omega}{f_\omega/m} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega} = (6.6) \checkmark \quad (6)$$

Einschub: δ-Delta-Funktion

ESchw 8

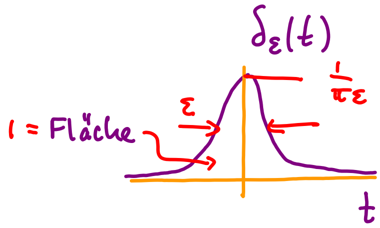


Definierende Eigenschaft v. δ-Funktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \, \delta(t) f(t) = f(0) \quad (1)$$

Eine mögliche Darstellung, Lorentz-Funktion:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \underbrace{\frac{\varepsilon/\pi}{\varepsilon^2 + t^2}}_{\equiv \delta_\varepsilon(t)} \quad (2)$$



Normierung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \, \delta_\varepsilon(t) = 1 \checkmark \quad (3)$$

Integraldarstellung

Betrachte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t - |\omega|\varepsilon} \quad (4)$$

Dämpfungsfaktor ($\varepsilon > 0$)

$$= \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left[e^{-\omega[it+\varepsilon]} + e^{-\omega[-it+\varepsilon]} \right] \quad (5)$$

$\mathrm{Re}\left[e^{-i\omega t - |\omega|\varepsilon}\right]$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{it+\varepsilon} + \frac{1}{-it+\varepsilon}\right] = \frac{\varepsilon/\pi}{\varepsilon^2 + t^2} \overset{(2)}{=} \delta_\varepsilon(t) \quad (6)$$

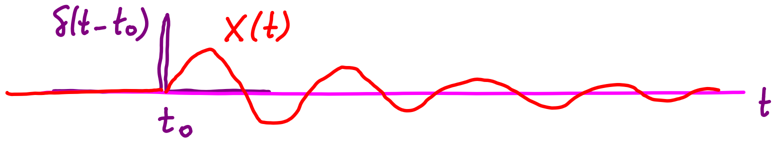
$\lim_{\varepsilon \to 0}$ (6)

$$\boxed{\delta(t) \overset{(2)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t}} \quad (7)$$

Ende Einschub

Antwort auf eine δ-Kraft: $f(t) = m\,\delta(t-t_0)$ (1) ESchw 9

Erwartete Lösung (qualitativ, für $\omega > \gamma$):



Fourier-Transf. des Antriebs:

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} f(t) \qquad \text{[Allgemeine Fourier-Rücktransf.]} \qquad (2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}\, m\,\delta(t-t_0) = m\, e^{i\omega t_0} \qquad (3)$$

Eingesetzt in (7.5):

$$\underbrace{X(\omega)}_{\equiv \chi_\omega} \overset{(7.5)}{=} \frac{f_\omega/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\lambda\omega} \equiv -\frac{e^{i\omega t_0}}{(\omega-\nu_+)(\omega-\nu_-)} \qquad (4)$$

mit Wurzeln:

$$\nu_\pm = \pm\tilde{\omega}_0 - i\lambda \quad , \text{ mit } \tilde{\omega}_0 = \sqrt{\underbrace{\omega_0^2 - \lambda^2}_{>0}} \qquad (5)$$

Check:

$$-(\omega-\nu_-)(\omega-\nu_+) = -\left[\omega^2 - \omega(\nu_+ + \nu_-) + \nu_-\nu_+\right] = -\left[\omega^2 + 2i\lambda\omega + (-\tilde{\omega}_0 - i\lambda)(\tilde{\omega}_0 - i\lambda)\right]$$

$$= -\left[\omega^2 - 2i\lambda\omega - \tilde{\omega}_0^2 - \lambda^2\right] = -\omega^2 - 2i\lambda\omega + \omega_0^2 \quad ✓ \qquad (6)$$

ESchw 10

Lösung:

$$X(t) \overset{(7.3)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t} X(\omega) \qquad (1)$$

$$\overset{(9.4)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t} \left[- \frac{e^{i\omega t_0}}{(\omega-\nu_+)(\omega-\nu_-)} \right] \qquad (2)$$

Integral lösen (mittels Bronstein): für $\omega_0 > \lambda$:

$$\boxed{X(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le t_0 \\ \frac{1}{\tilde{\omega}_0} \sin\tilde{\omega}_0 (t-t_0)\, e^{-\lambda(t-t_0)} & \text{für } t > t_0 \end{cases}} \qquad (3)$$

= Skizze auf Seite 10 ✓

Fazit:

(7.1), mit Antrieb (9.1):

$$(\partial_t^2 + 2i\gamma\partial_t + \omega_0^2) X = \delta(t) \qquad (4)$$

hat die Lösung (für $\omega_0 > \lambda$):

$$G(t) =: X(t) \overset{(3)}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0 \\ \frac{1}{\tilde{\omega}_0} \sin\tilde{\omega}_0 t\; e^{-\lambda t} & \text{für } t > 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Antwort auf δ-Kraft wird "Greensche Funktion" genannt. Sie ist sehr nützlich! z.B., liefert formalen Ausdruck für Antwort auf beliebigen Antrieb.

Greensche Funktionen (GF): Ergänzende Bemerkungen

ESchw 11

Betrachte die inhomogene Differenzialgleichung,

$$D_t\, f(t) = F(t) \tag{1}$$

Differentialoperator — gesuchte Funktion — vorgegebene Funktion ("Inhomogener Term")

Satz: Sei $f_h(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung $D_t\, f_h(t) = 0$ (2)

und $G(t)$ eine Lösung der Gleichung $D_t\, G(t) = \delta(t)$ (3) — Dirac-δ-Funktion.

($G(t)$ wird die "Greensche Funktion von D_t" genannt).

Dann kann die allgemeine Lösung von (1) kann wie folgt geschrieben werden:

$$f(t) = f_h(t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(t-t')\, F(t') \tag{4}$$

ESchw 12

"Beweis": D_t (11.4):

$$D_t\, f(t) = \underbrace{D_t\, f_h(t)}_{(11.2)} + \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \underbrace{D_t\, G(t-t')}_{(11.3)}\, F(t') \tag{1}$$

$$= 0 + \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, \delta(t-t')\, F(t') \tag{2}$$

$$\overset{(8.1)}{=} F(t) \checkmark \; (11.1) \tag{3}$$

[beachte die große Allgemeinheit: D_t, $g(t)$, sind beliebig!]

Bemerkungen:

- Sinn und Zweck von GF ist also: nützlich bei der Konstruktion allgemeiner Lösungen von inhomogenen Differentialgleichungen.
- Die Form der Green'schen Funktion wird über die definierende Gleichung (11.3) durch den Differentialoperator D_t und die Angabe von "Randbedingungen" bestimmt.
- Zwei beliebte Randbedingungen sind

"retardierte" Greensche F.: $G(t) = 0$ für $t < 0$ (für T1 relevant) (4a)

"avancierte" Greensche f.: $G(t) = 0$ für $t > 0$ (nur für Fortgeschrittene Anwendungen) (4b)

Alternative Bestimmung d. Greenschen Funktion für gedämpften HO:

Definierende Gl: $D_t\, G(t) = \delta(t)$, (1a) $\qquad D_t = \partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2$ (1b)

Ansatz: $G(t) = \Theta(t)\, g(t)$ (2)

$D_t\, G(t) = ① + ② + ③$

$$① = \partial_t^2(\Theta g) = \partial_t[\overset{(6)\;=\,\delta}{\dot\Theta} g + \Theta \dot g] \quad (3)$$

$$= \underbrace{\dot\delta g}_{(8)\;=\,-\delta\dot g} + \delta\dot g + \delta\dot g + \Theta\ddot g = \delta\dot g + \Theta\ddot g \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{t} dt'\,\delta(t') = \begin{cases} 1 & \text{falls } t>0 \\ 1/2 & \text{falls } t=0 \\ 0 & \text{falls } t<0 \end{cases} =: \Theta(t) \quad (5) \quad\Rightarrow\quad \partial_t(5):\ \delta(t) = \dot\Theta(t) \quad (6)$$

Partielle Integration

$$\int dt\, g(t)\,\partial_t\,\delta(t) = -\int dt\,[\partial_t g(t)]\,\delta(t) \quad (7) \quad\Rightarrow\quad g\,\delta' = -g'\,\delta \quad (8)$$

$$② = 2\gamma\partial_t(\Theta g) = 2\gamma[\delta g + \Theta g'] \quad (1)$$

$$③ = \omega_0^2\,(\Theta g) \quad (2)$$

$①+②+③$:
$$D_t(\Theta g) = \delta g' + 2\gamma\,\delta g + \Theta\overbrace{(g'' + 2\gamma g' + \omega_0^2 g)}^{D_t g} \quad (3)$$

$D_t(\Theta g) \overset{(13.1a)}{=} \delta$ ist gewährleistet, wenn wir fordern:

Homogene DG für g: (i) $D_t g = 0$, $\;$ für $\omega > \gamma$ $\Rightarrow$ $g(t) = A\,e^{-\gamma t}\sin(\tilde\omega_0 t + \gamma)$ (4), $\qquad \tilde\omega_0 \overset{(HO1.4)}{=} \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

Anfangsbedingungen für g:

(ii) $g(0) = 0$, $\Rightarrow$ $\varphi = 0$ (5)

(iii) $g'(0) = 1$. $\qquad g'(t) = -\gamma\, g(0) + A\,e^{-\gamma t}\,\tilde\omega_0\cos(\tilde\omega_0 t)$ (6)

$\Rightarrow A = \frac{1}{\tilde\omega_0}$

Lösung:
$$\boxed{G(t) \overset{(13.2),(4),(5),(6)}{=} \Theta(t)\,\frac{1}{\tilde\omega_0}\,e^{-\gamma t}\sin(\tilde\omega_0 t)} \quad (7)$$