Lagrangeformalismus

(v8) 06.05.08

L1

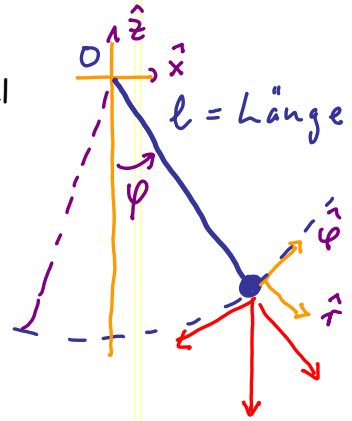
Lagrangegleichungen 1. Art

Newton: Kraft $\vec{K}^{tot}$ gegeben; löse N2: (1)

Aber: Oft treten Zwangskräfte auf, die erst durch Bewegung geweckt werden.

Gesamtkraft: $\vec{K}^{tot} =$ (2)

Beispiel:
Ebenes Pendel



Newton: (3)

Zwangs-
Bedingung (ZB): (4)

L2

2. Lösungsmethoden:

(a) Lagrange-Methode 1. Art: bestimme $\vec{z}$ explizit, und löse (1.3) für $\vec{x}(t)$

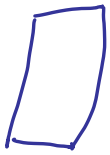
Hier: $\vec{z} = z(x,z)\,\hat{r}$ (1)

(b) Lagrange-Methode 2. Art: erfülle ZB identisch, durch Wahl geeigneter Koordinaten, löse deren Bwgsgl.

Hier: $\vec{r} :=$ (2)

löse (3)

Zwangsbedingungen (ZB): [Verallg. von (1.4)]



Betrachte 1 Teilchen in $\mathbb{R}^3$:

1. ZB: definiert 2D-Fläche "F1" in 3D-Raum (1)

2. ZB: definiert noch eine Fläche, "F2", in 3D-Raum (2)

Beispiel:
für ebenes Pendel: (3)

Allgemein: R Zwangsbedingungen für N Teilchen in $\mathbb{R}^3$:

Notation: $\chi := (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$ (4)

3N Koordinaten: $:= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N})$ (5)

$\vec{r}_1 = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3$

$\vec{r}_2 = x_4 \hat{e}_1 + x_5 \hat{e}_2 + x_6 \hat{e}_3$

$\vdots$

$\vec{r}_N = x_{3N-2} \hat{e}_1 + x_{3N-1} \hat{e}_2 + x_{3N} \hat{e}_3$

R Zwangsbedingungen: (1)

Anzahl freier Parameter
("Freiheitsgrade"):

Beispiel: 2 Massen am Stab:

Beispiel: Wippe:

Klassifikation v. Zwangsbedinungen:

"Holonome ZB":
(Geschw. kommen nicht vor)

$g_\alpha(x,t) = 0$ (falls / falls) (1)

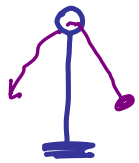
"skleronom" (zeitunabhängig) (2)

"reonom" (zeitabhängig) (3)

"Anholonome" oder "nicht-holonome" ZB:
(im folgenden nicht weiter diskutiert)

alles andere, z.B.

$g_\alpha(x, \dot{x}, t) = 0$ (Geschw.-abhängig) (4)



$g_\alpha(x,t) \leq 0$ (Ungleichheit) (5)

Holonome Zwangskräfte (ZK):

Holonome ZB $g_\alpha(x,t) = 0$ (1)

zwingt Bewegung in eine (3N-R)-dimensionale Hyperfläche (HF) hinein, doch innerhalb HF liefert sie keine Einschränkung auf Bewegung

Entsprechende ZK hängt von Bewegung ab; sie zwingt Bewegung, innerhalb HF zu verlaufen.

$\Rightarrow$ Holonome Zwangskraft — Hyperfläche (2)

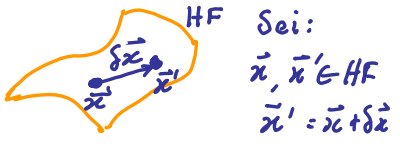
Ansatz für ZK (für N=1): $\vec{Z}_\alpha =$ (3)

Motivation:

HF ist definiert durch: $g_\alpha(\vec{x},t) =$

Richtung : $\vec{\nabla} g_\alpha(\vec{x},t)$:

Betrag v. Z: wird durch so eingestellt, dass Bwg. (trotz äußerer Kräfte) in HF bleibt



$0 =$

$=$

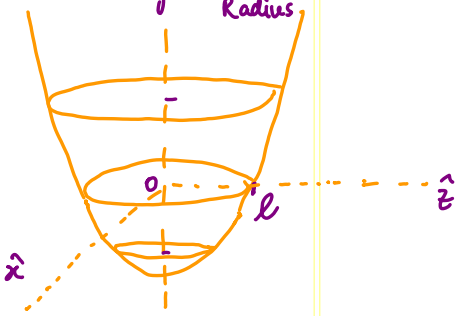
$=$

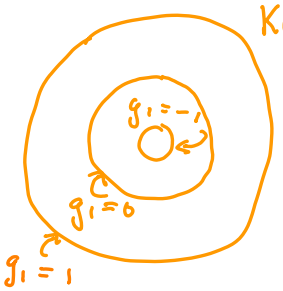
$=$

Beipspiel: ebenes Pendel

Hyperfläche F1: $g_1(x,y,z,t) =$

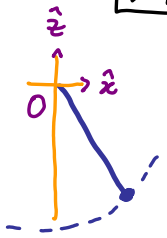
$x^2+z^2 = l^2 + g_1$: Kreis in xz-Ebene mit Radius





Konturplot
g_1 = konst.

(1)

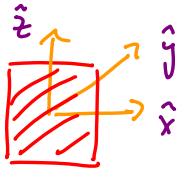


(2)

(Radiusvektor in x-z-Ebene)

Zwangskraft 1: $\vec{Z}_1 \overset{(6.3)}{=}$ (3)

Hyperfläche F2: $g_2(x,y,z,t) =$ (4)



(5)

Ende v. Beispiel

Bewegungsgleichung mit Zwangsbedingungen:

(6.3) eingesetzt in N2: $m\ddot{\vec{r}} \overset{(1.2)}{=} \vec{K}_{ext} + \vec{Z}$ (1)

$\overset{(6.3)}{=}$ (2)

ZB: (3)

(8.2), (8.3) sind Gleichungen mit Unbekannten

Durch Lösung dieser Gleichungen können alle Unbekannten bestimmt werden.

Verallgemeinerung auf beliebiges N: (3N Freiheitsgrade, n = 1, ..., 3N)

R Zwangsbedingungen: $g_\alpha(\ ,t) = 0$, (1)

(2)

Ansatz für Zwangkraft (in $\hat{e}_n$ -Richtung): $Z_\alpha^n =$

[Verallg. v. (6.3)]

(3)

(9.2) eingesetzt in N2

(9.1) und (9.3) bilden die "Lagrange-Gl. 1. Art": Gleichungen für Unbekannte

Beispiel für N = 2 mit einer ZB ($\alpha = 1$): ZK auf Teilchen 1, 2

Notation für Zwangskräfte: $(Z_1^1, Z_1^2, Z_1^3) \equiv \vec{Z}^{(1)}$, $(Z_1^4, Z_1^5, Z_1^6) \equiv \vec{Z}^{(2)}$ (1)
(allgemein Z_α^n)

Sei $g_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = g_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, t)$ (2)

(z.B. sei Abstand festgelegt:) $=$ (3)

ZK auf Teilchen 1: $\vec{Z}^{(1)} =$ (4)

$\vec{r}_1 = (x_1, x_2, x_3)$

ZK auf Teilchen 2: $\vec{Z}^{(2)} =$ (5)

$\vec{r}_2 = (x_4, x_5, x_6)$

$\vec{\nabla}_1 g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\vec{\nabla}_2 g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ (10.2) (6)

N3 wird reproduziert!

Erhaltungssätze

Falls ZB Symmetrien verletzen, gelten entsprechende Erhaltungsätze nicht mehr.

Impulserhaltung: $\frac{d\vec{p}}{dt} \overset{(N2)}{=} \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = \vec{K} + \vec{Z} \overset{\text{falls}}{=} 0$, dann $\vec{p} = \text{konst.}$ (1)

Drehimpulserhaltung: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times (\vec{K} + \vec{Z}) \overset{\text{falls}}{=} 0$, dann $\vec{L} = \text{konst}$ (2)

Energieerhaltung (für konservative Kräfte Kn):

$$(T + U) = \sum_n \left[\frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 + U_n(x_n(t)) \right] \quad (3)$$

$$= \sum_n \left[\qquad \right] \quad (4)$$

$$= \sum_n \dot{x}_n \left[\qquad \right] = \sum_n \sum_\alpha \quad (5)$$

Aber:

$0 = g_\alpha(x,t)$

$0 = \frac{d}{dt} g_\alpha(x,t)$

(6)

$$\frac{d}{dt}(T+U) = \quad (7)$$

Fazit: Energie-Erhaltung, falls ZB nicht explizit zeitabhängig sind, d.h.: $\partial_t g_\alpha = 0$ (8)

Lösungsrezept mit Lagrange-Gl. 1. Art (LG1):

1. Formulierung der ZB: (1)
2. Aufstellung der LG1: (2)
3. Eliminierung der
4. Lösung der Bewegungsgl. für
5. Bestimung der Integrationskonstanten
   (so, dass ZB und Anfangsbedingungen erfüllt sind)
6. Bestimmung der Zwangskräfte, via
7. Diskussion !! (3)

Schritt 3 im Allgemeinen: Eliminierung der λ_α :

Eliminiere zunächst $\ddot{x}_n$: (11.2)

$$m_n \ddot{x}_n = K_n(x, \dot{x}, t) + \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha \qquad (1)$$

$\frac{d}{dt}$(11.1)

$$0 = \frac{d}{dt} g_\alpha(x,t) = \qquad (2)$$

$\frac{d^2}{dt^2}$(11.1) = $\frac{d}{dt}$(12.2)

$$0 = \qquad (3)$$

$$\qquad (4)$$

Eliminiere $\ddot{x}_n$ aus (12.1) und (12.3):

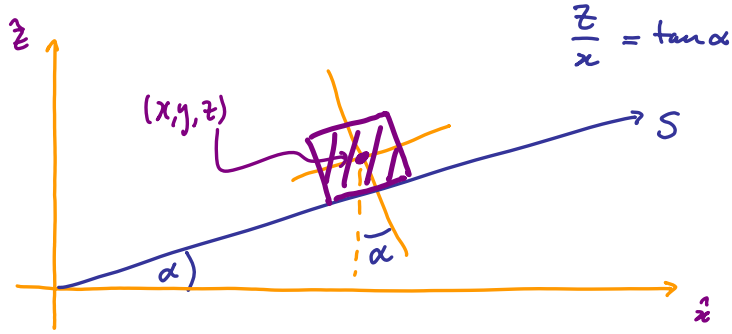
$$(\alpha = 1, \dots, R) \quad F_\alpha = \sum_n (\partial_n g_\alpha) \frac{1}{m_n} \left[K_n + \sum_\beta \lambda_\beta (\partial_n g_\beta) \right] \qquad (5)$$

Dies ist ein lineares, inhomogenes Gleichungsystem für die R Größen λ_α.
Kann im Prinzip gelöst werden; allgemeine Form der Lösung: $\lambda_\alpha =$

(12.5) in (12.1): $m_n \ddot{x}_n = K_n(x, \dot{x}, t) + Z_n(x, \dot{x}, t)$ (6)

Rechte Seite ist bekannte Funktion v. $x, \dot{x}, t$; lösen durch Integration...

Beispiel: Reibungsfreies gleiten auf schiefer Ebene



$$\frac{z}{x} = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (1)$$

Schritt 1:
(Formulierung der ZB)

$g_1(\vec{r}, t) =$ (1a)

$g_2(\vec{r}, t) =$ (1b)

Schritt 2:
(Aufstellung der LG1) (2)

$m\ddot{\vec{r}} =$

$m_n \ddot{x}_n = K_n + \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha$ $=$ (3)

(13.5) in Komponenten: $m\ddot{x} =$ (1a)

$m\ddot{y} =$ (1b)

$m\ddot{z} =$ (1c)

Schritt 3:
(Elimination v. λ_α) (12.3): $0 =$ (2)

(14.1) eingesetzt:
[entspricht (12.4)] $=$ (3)

Auflösen nach λ_1 :
[entspricht (12.5)] $\lambda_1 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) =$ (4)

Analog für $g_2 = 0$: $0 = \frac{d^2}{dt^2} g_2 \overset{(13.16)}{=} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 =$ (5)

Nun sind also λ_1 und λ_2 bekannt.

(14.5) in (14.1): (14.1a) $m\ddot{x} \overset{(14.4)}{=} \lambda_1 \sin\alpha$ (1)

$m\ddot{y} = 0$

(14.1c) $m\ddot{z} \overset{(14.4)}{=} -mg - \lambda_1 \cos\alpha$ (2)

$= -mg(1 - \cos^2\alpha) =$ (3)

(Nun sind λ_1 und λ_2 eliminiert)

Schritt 4:
(Lösen der Bewegungs-Gl. für x_n)
[Für dieses Beispiel ziemlich trivial...]

$x(t) \overset{(15.1)}{=} -\frac{1}{2} t^2 g \cos\alpha \sin\alpha + a_1 t + a_2$ (4)

$y(t) = b_1 t + b_2$ (5)

$z(t) = -\frac{1}{2} t^2 g \sin^2\alpha + c_1 t + c_2$ (6)

Schritt 5: Bestimmung der Integrationskonst., so, dass ZB und Anfangsbedingungen erfüllt sind.

ZB (13.1) für alle t:

$$x \sin\alpha = z \cos\alpha \,, \qquad y = 0 \tag{1}$$

(x nach (15.4), z nach (15.6))

t^2-Terme heben sich weg:

$$(a_1 t + a_2)\sin\alpha = (c_1 t + c_2)\cos\alpha \tag{2}$$

Ansatz zur Lösung v. (16.2):

$$a_1 = v_0 \cos\alpha \,, \qquad c_1 = v_0 \sin\alpha \tag{3}$$

(v_0: Anfangsgeschw.)

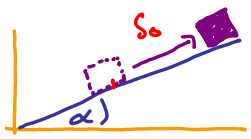
$$a_2 = s_0 \cos\alpha \,, \qquad c_2 = s_0 \sin\alpha \tag{4}$$

(s_0: Anfangsposition)

Eingesetzt in (15.6)

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= s(t)\cos\alpha \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= s(t)\sin\alpha \end{aligned}\right\} \text{ mit } s(t) = -\tfrac{1}{2} t^2 g_{\text{eff}} \sin\alpha + v_0 t + s_0 \tag{5}$$

$s(t) = \{$ zurückgelegter Abstand entlang $\vec{S}$-Achse



Schritt 6: (Bestimmung der Zwangskräfte) (11.3)

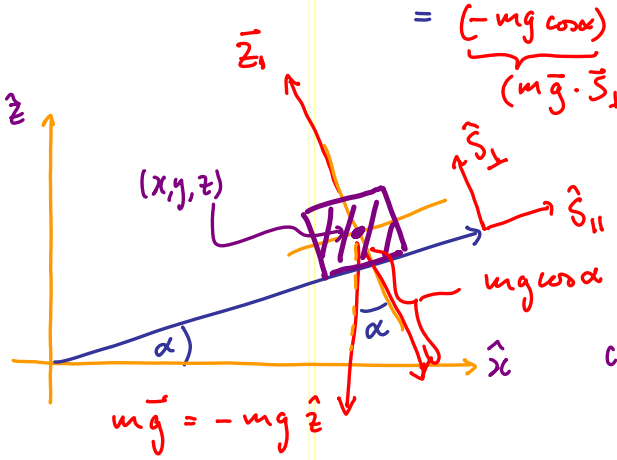
$$Z_\alpha^\eta = \lambda_\alpha \partial_\eta g_\alpha \tag{1}$$

$$\vec{Z}_1 = \lambda_1 \vec{\nabla} g_1 \,, \qquad |\vec{Z}_1| = mg\cos\alpha \tag{2}$$

(14.4)

$$= (-mg\cos\alpha)(\hat{e}_x \sin\alpha - \hat{e}_z \cos\alpha) \tag{3}$$

$(m\vec{g}\cdot\vec{S}_\perp)$ — siehe (13.3)



$$\vec{Z}_1 = (m\vec{g}\cdot\hat{S}_\perp)(-\hat{S}_\perp) \tag{4}$$

check: $= -m(-g\hat{e}_z)\cdot(-\hat{e}_x \sin\alpha + \hat{e}_z\cos\alpha)\,\hat{S}_\perp$ ✓

$= mg\cos\alpha\,(-\hat{e}_x\sin\alpha + \hat{e}_z\cos\alpha)$

$= (17.4)$

Schritt 7: Diskussion $\vec{Z}_1$ kompensiert Schwerkraftanteil $\perp$ zur schiefen Ebene [siehe (17.4)]

Bemerkung:

(16.5)

$$s(t) = -\frac{1}{2} t^2 g \sin\alpha + v_0 t + s_0 \qquad (1)$$

Bewegung entlang der $\hat{s}$ -Achse löst die effektive Bewegungs-Gleichung:

$$m\ddot{s}\,\hat{s}_{\parallel} = \underbrace{-mg\sin\alpha\;\hat{s}_{\parallel}}_{(m\vec{g}\cdot\hat{s}_{\parallel})\,\hat{s}_{\parallel}}, \qquad (2)$$

wobei:

$$\hat{s}_{\parallel} = (\hat{e}_x \cos\alpha + \hat{e}_z \sin\alpha) = \text{Kraft } \parallel \text{ zur Ebene} \qquad (3)$$

s(t) ist eine "verallgemeinerte Koordinate";

mit dem Ansatz

$$x(t) = s(t)\cos\alpha$$
$$y(t) = 0 \qquad (4)$$
$$z(t) = s(t)\sin\alpha$$

wäre (18.2) sofort aus N2, $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}$ gefolgt, ohne dass es nötig gewesen wäre, Zwangskräfte zu berechnen.

Moral v.d. Geschichte: suche zunächst verallg. Koordinaten!!