Lagrangeformalismus

(v8) 06.05.08

L1

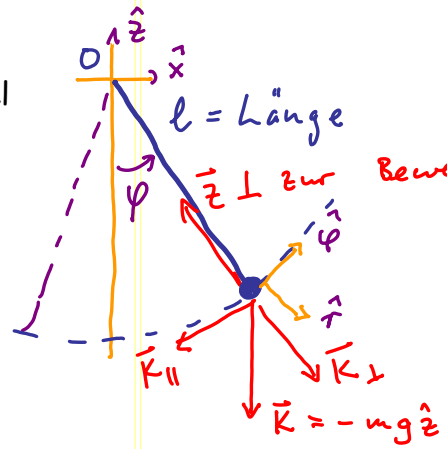
Lagrangegleichungen 1. Art

Newton: Kraft $\vec{K}^{tot}$ gegeben; löse N2: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K}^{tot}$ (1)

Aber: Oft treten Zwangskräfte auf, die erst durch Bewegung geweckt werden.

Gesamtkraft: $\vec{K}^{tot} = \vec{K}^{ext} + \vec{K}^{Zwang} = \vec{K} + \vec{Z}$ (2)

Beispiel:
Ebenes Pendel



Newton: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \vec{Z}$ (3)

Zwangs-Bedingung (ZB): $g(\vec{r}) := \vec{r}^2 - \ell^2 = 0$ (4)

L2

2. Lösungsmethoden:

(a) Lagrange-Methode 1. Art: bestimme $\vec{Z}$ explizit, und löse (1.3) für $\vec{x}(t)$

Hier: $\vec{Z} = Z(x,z)\,\hat{r}$ (1)

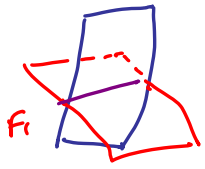
(b) Lagrange-Methode 2. Art: erfülle ZB identisch, durch Wahl geeigneter Koordinaten, löse deren Bwgsgl.

Hier: $\vec{r} := \ell \sin\varphi\,\hat{x} - \ell\cos\varphi\,\hat{z}$ (2)

löse $m\ddot{\varphi} \overset{N2}{=} \ldots$ für $\varphi(t)$ (3)

L3

Zwangsbedingungen (ZB): [Verallg. von (1.4)]



Betrachte 1 Teilchen in $\mathbb{R}^3$:

1. ZB: $g_1(\vec{r},t) = 0$ — definiert 2D-Fläche "F1" in 3D-Raum (1)

2. ZB: $g_2(\vec{r},t) = 0$ — definiert noch eine Fläche "F2", in 3D-Raum (2)

} definiert Kurve

Beispiel:
für ebenes Pendel: $g_1 := x^2 + z^2 - \ell^2 = 0$, $g_2 := y = 0$ (3)

Allgemein: R Zwangsbedingungen für N Teilchen in $\mathbb{R}^3$:

Notation: $\mathcal{X} := (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$ (4)

3N Koordinaten: $:= (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots, x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N})$ (5)

$\vec{r}_1 = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3$

$\vec{r}_2 = x_4\hat{e}_1 + x_5\hat{e}_2 + x_6\hat{e}_3$

$\vdots$

$\vec{r}_N = x_{3N-2}\hat{e}_1 + x_{3N-1}\hat{e}_2 + x_{3N}\hat{e}_3$

Komponenten: x_n, $n = 1, \ldots, 3N$

L4

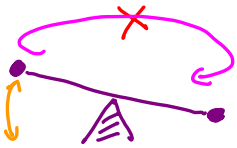
R Zwangsbedingungen: $g_\alpha(x,t) = 0$, $\alpha = 1, \ldots, R \ (\leq 3N-1)$ (1)

Anzahl freier Parameter ("Freiheitsgrade"): $f = 3N - R$

Beispiel: 2 Massen am Stab:

Abstand fest:
$f = 3 \cdot 2 - 1 = 5$

Beispiel: Wippe:



Abstand, SP fest:
$f = 3 \cdot 2 - 1 - 3 = 2$

falls Wippebene fest:
$f = 6 - 1 - 3 - 1 = 1$

Klassifikation v. Zwangsbedinungen:

"Holonome ZB": (Geschw. kommen nicht vor)

$g_\alpha(x,t) = 0$ (1)

- falls $\partial_t g_\alpha(x,t) = 0$: "skleronom" (zeitunabhängig) (2)
- falls $\partial_t g_\alpha(x,t) \neq 0$: "reonom" (zeitabhängig)

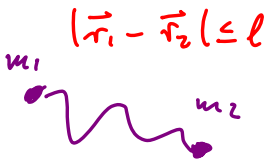
(3)

"Anholonome" oder "nicht-holonome" ZB: (im folgenden nicht weiter diskutiert)

alles andere, z.B.

$g_\alpha(x, \dot{x}, t) = 0$ (Geschw.-abhängig) (4)

$g_\alpha(x,t) \leq 0$ (Ungleichheit) (5)



Holonome Zwangskräfte (ZK):

Holonome ZB

$g_\alpha(x,t) = 0 \qquad \alpha = 1, \ldots, R$ (1)

zwingt Bewegung in eine (3N-R)-dimensionale Hyperfläche (HF) hinein, doch innerhalb HF liefert sie keine Einschränkung auf Bewegung

Entsprechende ZK hängt von Bewegung ab; sie zwingt Bewegung, innerhalb HF zu verlaufen.

$\Rightarrow$ **Holonome Zwangskraft $\perp$ Hyperfläche** (2)

Ansatz für ZK (für N=1): $x = \vec{x}$

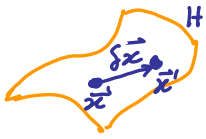
$\vec{Z}_\alpha = \lambda_\alpha(t)\, \vec{\nabla} g_\alpha(\vec{x},t)$ (3)

Motivation:

HF ist definiert durch: $g_\alpha(\vec{x},t) = 0$

Richtung: $\vec{\nabla} g_\alpha(\vec{x},t) : \perp$ HF

Betrag v. Z: wird durch $\lambda_\alpha(t)$ so eingestellt, dass Bwg. (trotz äußerer Kräfte) in HF bleibt



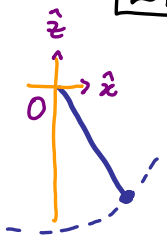
Sei: $\vec{x}, \vec{x}' \in$ HF, $\vec{x}' = \vec{x} + \delta\vec{x}$, $\delta\vec{x} \parallel$ HF

$$0 = g_\alpha(\vec{x},t) = g_\alpha(\vec{x}',t) = g_\alpha(\vec{x}+\delta\vec{x},t) = g_\alpha(\vec{x},t) + \delta\vec{x}\cdot\vec{\nabla} g_\alpha(x,t)$$

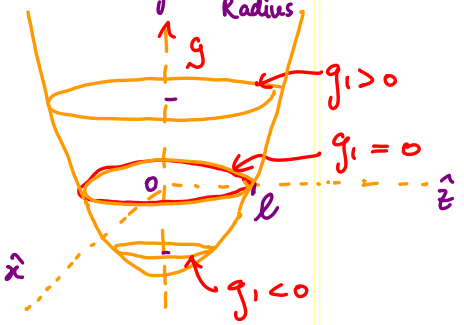
$\delta\vec{x}\cdot\vec{\nabla} g_\alpha = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} g_\alpha \perp$ HF

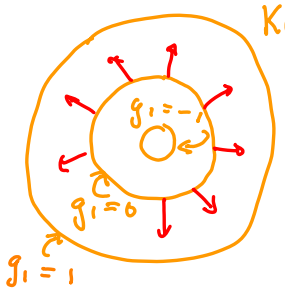
Beipspiel: ebenes Pendel

Hyperfläche F1: $g_1(x,y,z,t) := x^2 + z^2 - \ell^2 = 0$ (1)



$x^2+z^2 = \ell^2 + g_1$: Kreis in xz-Ebene mit Radius





$\vec{\nabla} g_1 = (\hat{e}_x \partial_x + \hat{e}_z \partial_z) g_1$

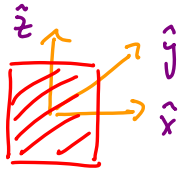
$\overset{(1)}{=} 2(x\hat{e}_x + z\hat{e}_z)$ (2)

$= 2\vec{r}$

(Radiusvektor in x-z-Ebene)

Zwangskraft 1: $\vec{Z}_1 \overset{(6.3)}{=} \lambda_1(t)\,\vec{\nabla} g_1 = \lambda_1(t)\, 2\vec{r}$ (3)

Hyperfläche F2: $g_2(x,y,z,t) := y = 0$ (4)



$\vec{\nabla} g_2 = \hat{e}_y$, $\vec{Z}_2 = \lambda_2(t)\,\hat{y}$ (5)

Ende v. Beispiel

Bewegungsgleichung mit Zwangsbedingungen:

(6.3) eingesetzt in N2: $m\ddot{\vec{r}} \overset{(1.2)}{=} \vec{K}^{ext} + \vec{Z}$ $\left(= \sum_\alpha \vec{Z}_\alpha\right)$ (1)

$\overset{(6.3)}{=} \vec{K}^{ext} + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t)\,\vec{\nabla} g_\alpha(\vec{x},t)$ (2)

$\vec{K}^{ext}$: gegeben

$\sum_{\alpha=1}^{R}$: Summe über alle Zwangskräfte

ZB: $g_\alpha(\vec{x},t) = 0$, $\alpha = 1, \dots, R$ (3)

(8.2), (8.3) sind $3+R$ Gleichungen mit $3+R$ Unbekannten

3: $\vec{x}(t)$; R: λ_α

Durch Lösung dieser Gleichungen können alle Unbekannten bestimmt werden.

Verallgemeinerung auf beliebiges N: (3N Freiheitsgrade, n = 1, ..., 3N)

R Zwangsbedingungen:

$$g_\alpha(x,t) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_{3N}) \qquad (1)$$

$\alpha = 1, \dots, R$

Ansatz für Zwangkraft (in $\hat{e}_n$ -Richtung): [Verallg. v. (6.3)]

$$Z_\alpha^n = \lambda_\alpha(t) \frac{\partial}{\partial x_n} g_\alpha(x,t), \quad n = 1, \dots, 3N \qquad (2)$$

gleiche Richtung" in $\mathbb{R}^{3N}$ wie von Z_α

$\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_{3N}\}$ = Basis für $\mathbb{R}^{3N}$

(9.2) eingesetzt in N2

$$x = \sum_{n=1}^{3N} x_n \hat{e}_n \in \mathbb{R}^{3N}$$

$$m_n \ddot{x}_n = K_n + \sum_\alpha \overbrace{\lambda_\alpha(t) \frac{\partial}{\partial x_n} g_\alpha(x,t)}^{Z_\alpha^n} \qquad (3)$$

$n = 1, \dots, 3N$

(9.1) und (9.3) bilden die "Lagrange-Gl. 1. Art": $3N + R$ Gleichungen für $3N + R$ Unbekannte

(9.3) (9.1)

x_n, λ_α

Beispiel für N = 2 mit einer ZB ($\alpha = 1$):

ZK auf Teilchen 1, 2

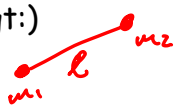
Notation für Zwangskräfte: $(Z_1^1, Z_1^2, Z_1^3) \equiv \vec{Z}^{(1)}$, $(Z_1^4, Z_1^5, Z_1^6) \equiv \vec{Z}^{(2)}$ (1)

(allgemein Z_α^n)

Sei $g_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = g_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, t)$ (2)

(z.B. sei Abstand festgelegt:)

$$:= |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - l = 0 \qquad (3)$$



ZK auf Teilchen 1: $\vec{r}_1 = (x_1, x_2, x_3)$

$$\vec{Z}^{(1)} = \lambda_1(t) \overbrace{(\partial_1, \partial_2, \partial_3)}^{\vec{\nabla}_1} g_1 = \lambda_1 \vec{\nabla}_1 g_1 \qquad (4)$$

ZK auf Teilchen 2: $\vec{r}_2 = (x_4, x_5, x_6)$

$$\vec{Z}^{(2)} = \lambda_1(t) \overbrace{(\partial_4, \partial_5, \partial_6)}^{\vec{\nabla}_2} g_1 = \lambda_1 \vec{\nabla}_2 g_1 \qquad (5)$$

$\vec{\nabla}_1 g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\vec{\nabla}_2 g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

$$\overset{(10.2)}{=} -\lambda_1 \vec{\nabla}_1 g_1 \overset{(4)}{=} -\vec{Z}^{(1)} \qquad (6)$$

N3 wird reproduziert!

$$\vec{\nabla}_1 g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \left(\hat{e}_x \partial_{x_1} + \hat{e}_y \partial_{y_1} + \hat{e}_z \partial_{z_1}\right) g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \vec{r}}\right)\left[\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_1}\right)\cdot \hat{e}_x + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_1}\hat{e}_y + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z_1}\hat{e}_z\right].$$

$$\vec{\nabla}_2 g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \left(\hat{e}_x \partial_{x_2} + \hat{e}_y \partial_{y_2} + \hat{e}_z \partial_{z_2}\right) g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$-\left(\frac{\partial g}{\partial \vec{r}}\right)\left[\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_1}\right)\cdot \hat{e}_x + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_1}\hat{e}_y + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z_1}\hat{e}_z\right].$$

$$\partial_{x_1}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\partial_{x_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Erhaltungssätze

L11a

Falls ZB Symmetrien verletzen, gelten entsprechende Erhaltungssätze nicht mehr.

Impulserhaltung:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \overset{(N2)}{=} \frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = \vec{K} + \vec{Z} \overset{\text{falls}}{=} 0 \text{ , dann } \vec{p} = \text{konst.} \quad (1)$$

Drehimpulserhaltung:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \vec{r}\times(\vec{K}+\vec{Z}) \overset{\text{falls}}{=} 0, \text{ dann } \vec{L} = \text{konst} \quad (2)$$

Energieerhaltung (für konservative Kräfte Kn):

$$\frac{d}{dt}(T+U) = \frac{d}{dt}\sum_n\left[\frac{1}{2}m_n\dot{x}_n^2 + U_n(x_n(t))\right] \quad (3)$$

$$= \sum_n\left[\dot{x}_n m\ddot{x}_n + (\partial_n U_n)\dot{x}_n\right] \quad (4)$$

$$= \sum_n \dot{x}_n\left[\cancel{K_n} + \sum_\alpha z^\alpha - \cancel{K_n}\right] = \sum_n\sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha \dot{x}_n \quad (5)$$

Aber:

$$0 = g_\alpha(x,t)$$

$$0 = \frac{d}{dt}0 = \frac{d}{dt}g_\alpha(x,t)$$

$$= \sum_n(\partial_n g_\alpha)\dot{x}_n + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} \quad (6)$$

$$\Rightarrow (*) = -\frac{\partial g_\alpha}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}(T+U) = -\sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_t g_\alpha \quad (7)$$

Fazit: Energie-Erhaltung, falls ZB nicht explizit zeitabhängig sind, d.h.: $\partial_t g_\alpha = 0$ (8)

Lösungsrezept mit Lagrange-Gl. 1. Art (LG1):

1. Formulierung der ZB: $g_\alpha(x,t) = 0$ (1)
2. Aufstellung der LG1: $m_n \ddot{x}_n = K_n + \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha$ (2)
3. Eliminierung der λ_α
4. Lösung der Bewegungsgl. für $x_n(t)$
5. Bestimung der Integrationskonstanten (so, dass ZB und Anfangsbedingungen erfüllt sind)
6. Bestimmung der Zwangskräfte, via $Z_\alpha^n = \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha(x,t)$
7. Diskussion !! (3)

Schritt 3 im Allgemeinen: Eliminierung der λ_α:

Eliminiere zunächst $\ddot{x}_n$: (11.2)

$$m_n \ddot{x}_n = K_n(x,\dot{x},t) + \underbrace{\sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha}_{Z_n} \quad (1)$$

$\frac{d}{dt}$(11.1)

$$0 = \frac{d}{dt} g_\alpha(x,t) = \sum_n (\partial_n g_\alpha)\dot{x}_n + \underbrace{\frac{\partial g_\alpha}{\partial t}}_{\text{Annahme } = 0} \quad (2)$$

$\frac{d^2}{dt^2}$(11.1) = $\frac{d}{dt}$(12.2)

$$0 = \sum_n (\partial_n g_\alpha)\ddot{x}_n + \sum_n (\partial_t(\partial_n g_\alpha))\dot{x}_n \quad (3)$$

$$\equiv -F_\alpha(x,\dot{x},t) \quad (4)$$

Eliminiere $\ddot{x}_n$ aus (12.1) und (12.3):

$(\alpha = 1,\dots,R)$

$$F_\alpha = \sum_n (\partial_n g_\alpha)\frac{1}{m_n}\left[K_n + \sum_\beta \lambda_\beta (\partial_n g_\beta)\right]$$

(1)

kein $\ddot{x}_n$ kommt in (5) vor!

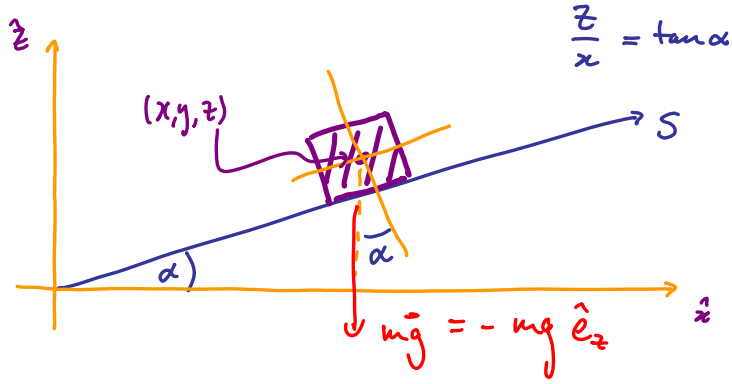
Dies ist ein lineares, inhomogenes Gleichungsystem für die R Größen λ_α.
Kann im Prinzip gelöst werden; allgemeine Form der Lösung: $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(x,\dot{x},t)$ (5)

(12.5) in (12.1): $m_n \ddot{x}_n = K_n(x,\dot{x},t) + Z_n(x,\dot{x},t)$ (6)

$$\hookrightarrow = \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha$$

Rechte Seite ist bekannte Funktion v. $x, \dot{x}, t$; lösen durch Integration...

Beispiel: Reibungsfreies gleiten auf schiefer Ebene



$\frac{z}{x} = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$z\cos\alpha = x\sin\alpha$ (1)

Schritt 1:
(Formulierung der ZB)

$g_1(\vec{r},t) := x\sin\alpha - z\cos\alpha = 0$ (1a)

$g_2(\vec{r},t) = y = 0$ (1b)

$\vec{\nabla} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$

Schritt 2:
(Aufstellung der LG1) (2)

$m_n\ddot{x}_n = K_n + \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha$

$m\ddot{\vec{r}} = -mg\hat{e}_z + \lambda_1\vec{\nabla}g_1 + \lambda_2\vec{\nabla}g_2$

$= -mg\hat{e}_z + \lambda_1(\hat{e}_x\sin\alpha - \hat{e}_z\cos\alpha) + \lambda_2\hat{e}_y$ (3)

(13.5) in Komponenten:

$m\ddot{x} = \lambda_1\sin\alpha$ (1a)

$m\ddot{y} = \lambda_2$ (1b)

$m\ddot{z} = -mg - \lambda_1\cos\alpha$ (1c)

Schritt 3:
(Elimination v. λ_α)

(12.3): $0 = \frac{d^2}{dt^2}g_1 = \ddot{x}\sin\alpha - \ddot{z}\cos\alpha$ (2)

(14.1) eingesetzt:
[entspricht (12.4)]

$= \frac{\lambda_1}{m}\sin^2\alpha - \left(-g - \frac{\lambda_1}{m}\cos\alpha\right)\cos\alpha$ (3)

Auflösen nach λ_1:
[entspricht (12.5)]

$\lambda_1\underbrace{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}_{=1} = -mg\cos\alpha = \lambda_1$ (4)

Analog für $g_2 = 0$:

$0 = \frac{d^2}{dt^2}g_2 \overset{(13.16)}{=} \ddot{y} \Rightarrow \lambda_2 = 0$ (5)

Nun sind also λ_1 und λ_2 bekannt.

(14.5) in (14.1):

(14.1a) $m\ddot{x} \overset{(14.4)}{=} \underbrace{-mg\cos\alpha}_{\lambda_1}\sin\alpha$ (1)

(14.1b) $m\ddot{y} = 0$

(14.1c) $m\ddot{z} \overset{(14.4)}{=} -mg - \underbrace{(-mg\cos\alpha)}_{\lambda_1}\cos\alpha$ (2)

$= -mg(1-\cos^2\alpha) = -mg\sin^2\alpha$ (3)

$m\ddot{z} = -mg\sin^2\alpha$

(Nun sind λ_1 und λ_2 eliminiert)

Schritt 4:
(Lösen der Bewegungs-Gl. für x_n)
[Für dieses Beispiel ziemlich trivial...]

$x(t) \overset{(15.1)}{=} -\frac{1}{2}t^2 g\cos\alpha\sin\alpha + a_1 t + a_2$ (4)

$y(t) = b_1 t + b_2$ (5)

$z(t) = -\frac{1}{2}t^2 g\sin^2\alpha + c_1 t + c_2$ (6)

Schritt 5: Bestimmung der Integrationskonst., so, dass ZB und Anfangsbedingungen erfüllt sind.

ZB (13.1) für alle t:

$x\sin\alpha = z\cos\alpha$, $y = 0$ (1)

(x ↓(15.4), z ↓(15.6))

t^2-Terme heben sich weg:

$(a_1 t + a_2)\sin\alpha = (c_1 t + c_2)\cos\alpha$ (2)

Ansatz zur Lösung v. (16.2):

$a_1 = v_0\cos\alpha$, $c_1 = v_0\sin\alpha$ (3)

(v_0 ← Anfangsgeschw.)

$a_2 = s_0\cos\alpha$, $c_2 = s_0\sin\alpha$ (4)

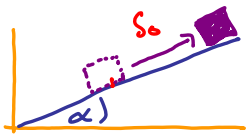
(s_0 ↑ Anfangsposition)

Eingesetzt in (15.6)

$x(t) = s(t)\cos\alpha$
$y(t) = 0$
$z(t) = s(t)\sin\alpha$

mit $s(t) = -\frac{1}{2}t^2 \underbrace{g\sin\alpha}_{g_{eff}} + v_0 t + s_0$ (5)

$s(t) = \{$ zurückgelegter Abstand entlang S-Achse



L17

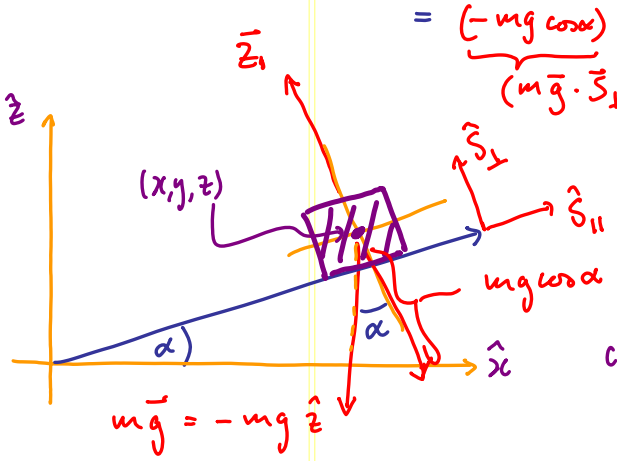
Schritt 6: (Bestimmung der Zwangskräfte)

$$Z_\alpha^\eta = \lambda_\alpha \partial_\eta g_\alpha \quad (11.3) \qquad (1)$$

$$\vec{Z}_1 = \lambda_1 \vec{\nabla} g_1 \,, \qquad |Z_1| = mg\cos\alpha \qquad (2)$$

(14.4)

$$= \underbrace{(-mg\cos\alpha)}_{(m\vec{g}\cdot\hat{s}_\perp)} \underbrace{(\hat{e}_x \sin\alpha - \hat{e}_z \cos\alpha)}_{\text{siehe (13.3)}} \qquad (3)$$



$$\vec{Z}_1 = (m\vec{g}\cdot\hat{s}_\perp)(-\hat{s}_\perp) \qquad (4)$$

check: $= -m(-g\hat{e}_z)\cdot(-\hat{e}_x\sin\alpha + \hat{e}_z\cos\alpha)\,\hat{s}_\perp$

$= mg\cos\alpha\,(-\hat{e}_x\sin\alpha + \hat{e}_z\cos\alpha)$ ✓

$= (17.4)$

Schritt 7: Diskussion $\vec{Z}_1$ kompensiert Schwerkraftanteil $\perp$ zur schiefen Ebene [siehe (17.4)]

L18

Bemerkung:

Bewegung entlang der $\hat{s}$-Achse löst die effektive Bewegungs-Gleichung:

$$s(t) = -\tfrac{1}{2}t^2 g\sin\alpha + v_0 t + s_0 \quad (16.5) \qquad (1)$$

$$m\ddot{s}\,\vec{s}_\parallel = \underbrace{-mg\sin\alpha\,\hat{s}_\parallel}_{(m\vec{g}\cdot\hat{s}_\parallel)\hat{s}_\parallel}, \qquad (2)$$

wobei: $\hat{s}_\parallel = (\hat{e}_x\cos\alpha + \hat{e}_z\sin\alpha)$ = Kraft $\parallel$ zur Ebene (3)

s(t) ist eine "verallgemeinerte Koordinate";

mit dem Ansatz

$$x(t) = s(t)\cos\alpha$$
$$y(t) = 0 \qquad (4)$$
$$z(t) = s(t)\sin\alpha$$

wäre (18.2) sofort aus N2, $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}$ gefolgt, ohne dass es nötig gewesen wäre, Zwangskräfte zu berechnen.

Moral v.d. Geschichte: suche zunächst verallg. Koordinaten!!