Lagrangeformalismus

(v8) 06.05.08 L1

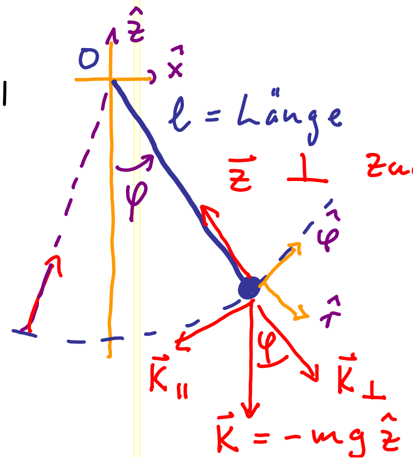
Lagrangegleichungen 1. Art

Newton: Kraft $\vec{K}^{tot}$ gegeben; löse N2: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K}^{tot}$ (1)

Aber: Oft treten Zwangskräfte auf, die erst durch Bewegung geweckt werden.

Gesamtkraft: $\vec{K}^{tot} = \vec{K}^{ext} + \vec{K}^{Zwang} \equiv \vec{K} + \vec{Z}$ (2)

<u>Beispiel:</u>
Ebenes Pendel



$\vec{Z} \perp$ zur Bewegungsrichtung

Newton: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K} + \vec{Z}$ (3)

Zwangs-Bedingung (ZB): $g(\vec{r}) := \vec{r}^2 - \ell^2 = 0$ (4)

L2

2. Lösungsmethoden:

(a) Lagrange-Methode 1. Art: bestimme $\vec{Z}$ explizit, und löse (1.3) für $\vec{x}(t)$

Hier: $\vec{Z} = Z(x, z)\,\hat{r}$ (1)

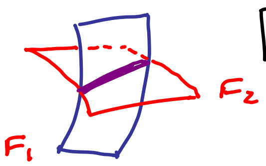
(b) Lagrange-Methode 2. Art: erfülle ZB identisch, durch Wahl geeigneter Koordinaten, löse deren Bwgsgl.

Hier: $\vec{r} := \ell \sin\varphi\,\hat{x} - \ell\cos\varphi\,\hat{z}$ (2)

löse $m\ddot{\varphi} \overset{N2}{=} \ldots$ für $\varphi(t)$ (3)

<u>Zwangsbedingungen (ZB):</u> [Verallg. von (1.4)]

L3



Betrachte 1 Teilchen in $\mathbb{R}^3$:

1. ZB: $g_1(\vec{r}, t) = 0$ definiert 2D-Fläche "F1" in 3D-Raum (1)

2. ZB: $g_2(\vec{r}, t) = 0$ definiert noch eine Fläche, "F2", in 3D-Raum (2)

definiert Kurve

Beispiel:
für ebenes Pendel: $g_1 = x^2 + z^2 - \ell^2 = 0, \qquad g_2 = y = 0$ (3)

<u>Allgemein:</u> R Zwangsbedingungen für N Teilchen in $\mathbb{R}^3$:

<u>Notation:</u> $x := (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$ (4)

3N Koordinaten: $:= (\underbrace{x_1, x_2, x_3}, \underbrace{x_4, x_5, x_6}, \ldots, \underbrace{x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N}})$ (5)

$\vec{r}_1 = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3$

$\vec{r}_2 = x_4 \hat{e}_1 + x_5 \hat{e}_2 + x_6 \hat{e}_3$

$\vdots$

$\vec{r}_N = x_{3N-2} \hat{e}_1 + x_{3N-1} \hat{e}_2 + x_{3N} \hat{e}_3$

Komponenten: $x_n, \quad n = 1, \ldots, 3N$

L4

R Zwangsbedingungen: $g_\alpha(x, t) = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, R \quad (\leq 3N-1)$ (1)

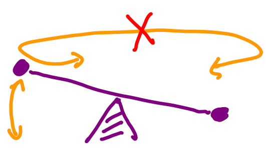
Anzahl freier Parameter ("Freiheitsgrade"): $f = 3N - R$

Beispiel: 2 Massen am Stab:

Abstand fest:

$f = 3 \cdot 2 - 1 = 5$

Beispiel: Wippe:



Abstand, SP fest:

$f = 3 \cdot 2 - 1 - 3 = 2$

falls Wippebene fest:

$f = 6 - 1 - 3 - 1 = 1$

L5

Klassifikation v. Zwangsbedingungen:

"Holonome ZB":
(Geschw. kommen nicht vor)

$$g_\alpha(x,t) = 0 \qquad (1)$$

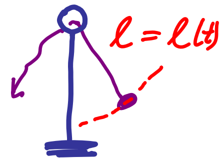
falls $\partial_t g_\alpha(x,t) = 0$ "skleronom" (zeitunabhängig) (2)

$\partial_t g_\alpha(x,t) \neq 0$ "reonom" (zeitabhängig) (3)

"Anholonome" oder "nicht-holonome" ZB:
(im folgenden nicht weiter diskutiert)

alles andere, z.B.

$$g_\alpha(x,\dot{x},t) = 0$$ (Geschw.-abhängig) (4)



$$g_\alpha(x,t) \leq 0$$ (Ungleichheit) (5)

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \leq \ell$$

L6

Holonome Zwangskräfte (ZK):

Holonome ZB $\quad g_\alpha(x,t) = 0 \qquad \alpha = 1,\dots,R \qquad (1)$

zwingt Bewegung in eine (3N-R)-dimensionale Hyperfläche (HF) hinein, doch innerhalb HF liefert sie keine Einschränkung auf Bewegung

Entsprechende ZK hängt von Bewegung ab; sie zwingt Bewegung, innerhalb HF zu verlaufen.

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Holonome Zwangskraft} \perp \text{Hyperfläche}}$ (2)

Ansatz für ZK (für N=1): , $\mathbb{R}^3$ $\quad \vec{Z}_\alpha = \lambda_\alpha(t)\,\vec{\nabla} g_\alpha(\vec{x},t) \quad (3)$

Motivation:

HF ist definiert durch: $g_\alpha(\vec{x},t) = 0$

Richtung : $\vec{\nabla} g_\alpha(\vec{x},t)$: $\perp$ HF

Betrag v. $|\vec{Z}|$. wird durch $\lambda_\alpha(t)$ so eingestellt, dass Bwg. (trotz äußerer Kräfte) in HF bleibt

Sei: $\vec{x}, \vec{x}' \in HF$
$\vec{x}' = \vec{x} + \delta\vec{x}$
$\delta\vec{x} \parallel HF$

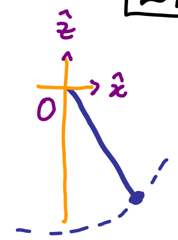
$$0 = g_\alpha(\vec{x},t) = g_\alpha(\vec{x}',t) = g_\alpha(\vec{x}+\delta\vec{x},t) = \cancel{g_\alpha(\vec{x})}^{=0} + \delta\vec{x}\cdot\vec{\nabla} g_\alpha(x,t)$$

$$\delta\vec{x}\cdot\vec{\nabla} g_\alpha = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} g_\alpha \perp HF$$

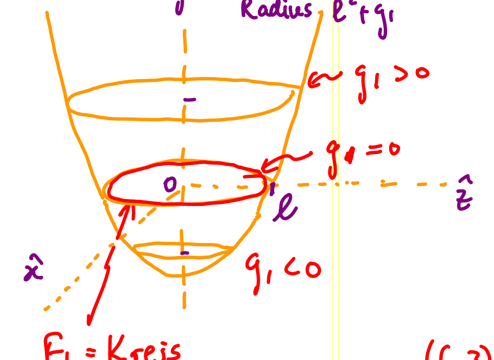
L7

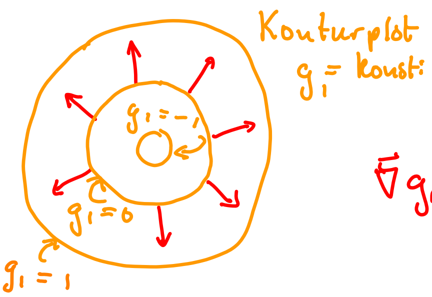
Beipspiel: ebenes Pendel

Hyperfläche F1: $g_1(x,y,z,t) = x^2+z^2-\ell^2=0$ (1)



$x^2+z^2=\ell^2+g_1$: Kreis in xz-Ebene mit Radius ℓ^2+g_1



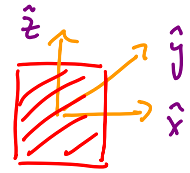


$$\vec\nabla g_\alpha = 2(x\hat e_x + z\hat e_z) \quad (2)$$
$$= 2\vec r$$

(Radiusvektor in x-z-Ebene)

Zwangskraft 1: $\vec Z_1 \overset{(6.3)}{=} \lambda_1(t)\, 2\vec r$ (3)

Hyperfläche F2: $g_2(x,y,z,t) = y = 0$ (4)



$$\vec\nabla g_2 = \hat e_y \,, \quad \vec Z_2 \overset{(6.3)}{=} \lambda_2(t)\,\hat y \quad (5)$$

Ende v. Beispiel

L8

Bewegungsgleichung mit Zwangsbedingungen:

(6.3) eingesetzt in N2: $m\ddot{\vec r} \overset{(1.2)}{=} \vec K^{ext} + \vec Z$ (1)

$$\overset{(6.3)}{=} \vec K^{ext} + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha(t)\, \vec\nabla g_\alpha(\vec x,t) \quad (2)$$

gegeben — Summe über alle ZK.

ZB: $g_\alpha(\vec x,t) = 0 \quad , \quad \alpha=1,\dots,R$ (3)

(8.2), (8.3) sind $\underset{3\quad R}{3+R}$ Gleichungen mit $3+R$ Unbekannten

$\vec x(t)$ — λ

Durch Lösung dieser Gleichungen können alle Unbekannten bestimmt werden.

Verallgemeinerung auf beliebiges N: (3N Freiheitsgrade, n = 1, ..., 3N) $\boxed{L9}$

R Zwangsbedingungen:

$$\boxed{g_\alpha(x,t) = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_{3N}), \quad \alpha = 1, \dots, R} \qquad (1)$$

Ansatz für Zwangkraft (in $\hat{e}_n$ -Richtung):
[Verallg. v. (6.3)]

$$Z^n_\alpha = \lambda_\alpha(t) \frac{\partial}{\partial x_n} g_\alpha(x,t), \quad n = 1, \dots, 3n \qquad (2)$$

(9.2) eingesetzt in N2

$$\boxed{m_n \ddot{x}_n = K_n + \overbrace{\sum_\alpha \lambda_\alpha(t) \frac{\partial}{\partial x_n} g_\alpha(x,t)}^{Z^n_\alpha}, \quad n = 1, \dots, 3N} \qquad (3)$$

(9.1) und (9.3) bilden die "Lagrange-Gl. 1. Art": $\overset{(9.3)}{3N} + \overset{(9.1)}{R}$ Gleichungen für
$3N + R$ Unbekannte

$x_n \quad \lambda_\alpha$

Beispiel für N = 2 mit einer ZB ($\alpha = 1$): $\boxed{L10}$

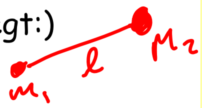
ZK auf Teilchen 1, 2

Notation für Zwangskräfte: (allgemein Z^n_α)

$$(Z^1_1, Z^2_1, Z^3_1) = \vec{Z}^{(1)}, \quad (Z^4_1, Z^5_1, Z^6_1) = \vec{Z}^{(2)} \qquad (1)$$

Sei $$g_1(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = g_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, t) \qquad (2)$$

(z.B. sei Abstand festgelegt:)



$$\overset{\text{z.B.}}{=} |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - \ell = 0 \qquad (3)$$

ZK auf Teilchen 1:
$\vec{r}_1 = (x_1, x_2, x_3)$

$$\vec{Z}^{(1)} = \lambda_1(t) \overbrace{(\partial_1, \partial_2, \partial_3)}^{\vec{\nabla}_1} g_1 = \lambda_1 \vec{\nabla}_1 g_1 \qquad (4)$$

ZK auf Teilchen 2:
$\vec{r}_2 = (x_4, x_5, x_6)$

$$\vec{Z}^{(2)} = \lambda_1(t) \overbrace{(\partial_4, \partial_5, \partial_6)}^{\vec{\nabla}_2} g_1 = \lambda_1 \vec{\nabla}_2 g_1 \qquad (5)$$

$$\vec{\nabla}_1 g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\vec{\nabla}_2 g(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \qquad \overset{(10.2)}{=} -\lambda_1 \vec{\nabla}_1 g_1 \overset{(10.4)}{=} -\vec{Z}^{(1)} \qquad (6)$$

N3 wird reproduziert!

Erhaltungssätze

L11a

Falls ZB Symmetrien verletzen, gelten entsprechende Erhaltungsätze nicht mehr.

Impulserhaltung: $$\frac{d\vec p}{dt} \overset{(N2)}{=} \frac{d}{dt}(m\dot{\vec r}) = \vec K + \vec Z \overset{\text{falls}}{=} 0 \text{, dann } \vec p = \text{konst.} \quad (1)$$

Drehimpulserhaltung: $$\frac{d\vec L}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec r\times\dot{\vec r}) = \vec r\times(\vec K+\vec Z) \overset{\text{falls}}{=} 0 \text{, dann } \vec L = \text{konst} \quad (2)$$

Energieerhaltung (für konservative Kräfte Kn):

$$\frac{d}{dt}(T+U) = \frac{d}{dt}\sum_n\left[\frac{1}{2}m_n\dot x_n^2 + U_n(x_n(t))\right] \quad (3)$$

$$= \sum_n\left[\dot x_n\, m\,\ddot x_n + \partial_n U_n \cdot \dot x_n\right] \quad (4)$$

$$= \sum_n \dot x_n\left[\cancel{K_n} + \sum_\alpha Z_\alpha^n - \cancel{K_n}\right] = \sum_n\sum_\alpha \lambda_\alpha \underbrace{(\partial_n g_\alpha)\,\dot x_n}_{\overset{(6)}{=}\, -\frac{\partial g_\alpha}{\partial t}} \quad (5)$$

Aber:

$$0 = g_\alpha(x,t)$$

$$0 = \frac{d}{dt} g_\alpha(x,t) = \sum_n(\partial_n g_\alpha)\,\dot x_n + \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} \quad (6)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T+U) = -\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial t} g_\alpha \quad (7)}$$

Fazit: Energie-Erhaltung, falls ZB nicht explizit zeitabhängig sind, d.h.: $\partial_t g_\alpha = 0$ (8)

Lösungsrezept mit Lagrange-Gl. 1. Art (LG1):

L11b

1. Formulierung der ZB: $g_\alpha(x,t) = 0$ (1)
2. Aufstellung der LG1: $m_n \ddot x_n = K_n + \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha$ (2)
3. Eliminierung der λ_α
4. Lösung der Bewegungsgl. für x_n
5. Bestimung der Integrationskonstanten (so, dass ZB und Anfangsbedingungen erfüllt sind)
6. Bestimmung der Zwangskräfte, via $Z_\alpha^n = \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha(x,t)$
7. Diskussion !! (3)

$x_n(t)$

Schritt 3 im Allgemeinen: Eliminierung der λ_α:

L12

Eliminiere zunächst $\ddot{x}_n$:

(11.2) $$m_n \ddot{x}_n = K_n(x,\dot{x},t) + \overbrace{\sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha}^{Z_n} \qquad (1)$$

$\frac{d}{dt}$(11.1) $$0 = \frac{d}{dt} g_\alpha(x,t) = \sum_n (\partial_n g_\alpha)\dot{x}_n \qquad (2)$$

$\frac{d^2}{dt^2}$(11.1) = $\frac{d}{dt}$(12.2) $$0 = \sum_n (\partial_n g_\alpha)\ddot{x}_n + \underbrace{\sum_n \left(\partial_t(\partial_n g_\alpha)\right)\dot{x}_n}_{\equiv\, -F_\alpha(x,\dot{x},t)} \qquad (3)$$

$$(4)$$

Eliminiere $\ddot{x}_n$ aus (12.1) und (12.3):

$(\alpha = 1,\dots,R)$ $$F_\alpha = \sum_n (\partial_n g_\alpha)\frac{1}{m_n}\left[K_n + \sum_\beta \lambda_\beta(\partial_n g_\beta)\right] \qquad (5)$$

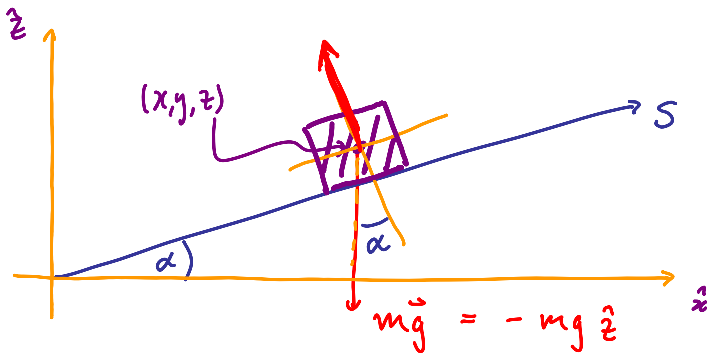
Dies ist ein lineares, inhomogenes Gleichungsystem für die R Größen λ_α.
Kann im Prinzip gelöst werden; allgemeine Form der Lösung: $\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(x,\dot{x},t)$

(12.5) in (12.1): $$m_n \ddot{x}_n = K_n(x,\dot{x},t) + Z_n(x,\dot{x},t) \qquad (6)$$
$$Z_n(x,\dot{x},t) = \sum_\alpha \lambda_\alpha(x,\dot{x},t)\,\partial_n g(x,t)$$

Rechte Seite ist bekannte Funktion v. $x, \dot{x}, t$; lösen durch Integration...

Beispiel: Reibungsfreies gleiten auf schiefer Ebene

L13



$$z\cos\alpha = x\sin\alpha$$
$$\frac{z}{x} = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (1)$$

Schritt 1:
(Formulierung der ZB)

$$g_1(\vec{r},t) = x\sin\alpha - z\cos\alpha = 0 \qquad (1a)$$

$$g_2(\vec{r},t) = y = 0 \qquad (1b)$$

Schritt 2:
(Aufstellung der LG1)

$m_n\ddot{x}_n = K_n + \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha$

$$m\ddot{\vec{r}} = -mg\,\hat{e}_z + \lambda_1 \underbrace{\vec{\nabla} g_1} + \lambda_2 \vec{\nabla} g_2 \qquad (2)$$

$$= -mg\,\hat{e}_z + \lambda_1(\hat{e}_x \sin\alpha - \hat{e}_z\cos\alpha) + \lambda_2\,\hat{e}_z \qquad (3)$$

L14

(13.5) in Komponenten:

$$m\ddot{x} = \lambda_1 \sin\alpha \qquad (1a)$$

$$m\ddot{y} = \lambda_2 \qquad (1b)$$

$$m\ddot{z} = -mg - \lambda_1 \cos\alpha \qquad (1c)$$

Schritt 3:
(Elimination v. λ_α)

$$(12.3):\quad 0 = \frac{d^2}{dt^2} g_1 = \ddot{x}\sin\alpha - \ddot{z}\cos\alpha \qquad (2)$$

(14.1) eingesetzt:
[entspricht (12.4)]

$$= \frac{\lambda_1}{m}\sin^2\alpha - \left(-g - \frac{\lambda_1}{m}\cos\alpha\right)\cos\alpha \qquad (3)$$

Auflösen nach λ_1 :
[entspricht (12.5)]

$$\lambda_1 \underbrace{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}_{=1} = -mg\cos\alpha = \lambda_1 \qquad (4)$$

Analog für $g_2 = 0$;

$$0 = \frac{d^2}{dt^2} g_2 \overset{(13.1b)}{=} \ddot{y} \Rightarrow \overset{(14.1b)}{\lambda_2 = 0} \qquad (5)$$

Nun sind also λ_1 und λ_2 bekannt.

L15

(14.5) in (14.1):

$$(14.1a)\quad \boxed{m\ddot{x} \overset{(14.4)}{=} \overbrace{-mg\cos\alpha}^{\lambda_1}\sin\alpha} \qquad (1)$$

$$m\ddot{y} = 0$$

$$(14.1c)\quad m\ddot{z} \overset{(14.4)}{=} -mg - \overbrace{(-mg\cos\alpha)}^{\lambda_1}\cos\alpha \qquad (2)$$

$$= -mg(1-\cos^2\alpha) = -mg\sin^2\alpha \qquad (3)$$

(Nun sind λ_1 und λ_2 eliminiert)

$$\boxed{m\ddot{z} = -mg\sin^2\alpha}$$

Schritt 4:
(Lösen der Bewegungs-Gl. für x_n)
[Für dieses Beispiel ziemlich trivial...]

$$x(t) \overset{(15.1)}{=} -\frac{1}{2}t^2 g\cos\alpha\sin\alpha + a_1 t + a_2 \qquad (4)$$

$$y(t) = b_1 t + b_2 \qquad (5)$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}t^2 g\sin^2\alpha + c_1 t + c_2 \qquad (6)$$

Schritt 5: Bestimmung der Integrationskonst., so, dass ZB und Anfangsbedingungen erfüllt sind. $\boxed{L16}$

ZB (13.1) für alle t:

$$x \sin\alpha = z\cos\alpha \,, \qquad y = 0 \qquad (1)$$

$$\downarrow (15.4) \qquad\qquad \downarrow (15.6)$$

t^2- Terme heben sich weg:

$$(a_1 t + a_2)\sin\alpha = (c_1 t + c_2)\cos\alpha \qquad (2)$$

Ansatz zur Lösung v. (16.2):

Anfangsgeschw.

$$a_1 = \underline{\underline{v_0}}\cos\alpha \,, \qquad c_1 = v_0 \sin\alpha \qquad (3)$$

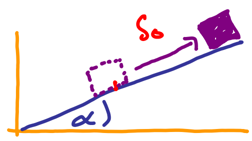
$$a_2 = \underline{\underline{s_0}}\cos\alpha \,, \qquad c_2 = s_0 \sin\alpha \qquad (4)$$

Anfangsposition

Eingesetzt in (15.6)

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= s(t)\cos\alpha \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= s(t)\sin\alpha \end{aligned}\right\} \text{ mit } s(t) = -\tfrac{1}{2}t^2 \underbrace{g\sin\alpha}_{g_{\text{eff}}} + v_0 t + s_0 \qquad (5)$$

$s(t) = \{$ zurückgelegter Abstand entlang $\hat{S}$-Achse



Schritt 6: (Bestimmung der Zwangskräfte) $\boxed{L17}$

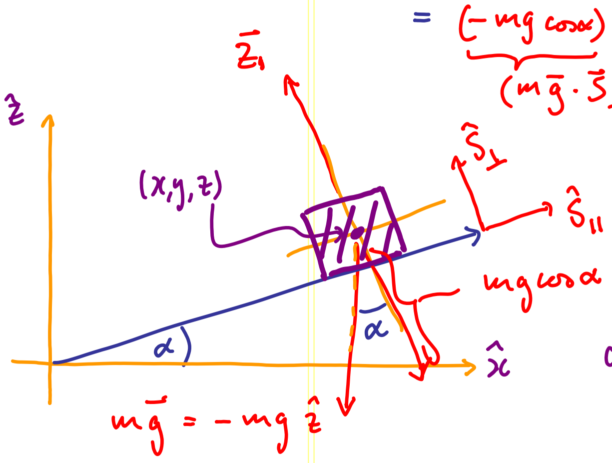
$$(11.3) \qquad Z_\alpha^n = \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha \qquad (1)$$

$$\vec{Z}_1 = \lambda_1 \vec{\nabla} g_1 \,, \qquad |Z_1| = mg\cos\alpha \qquad (2)$$

$$(14.4) \downarrow$$

$$= \underbrace{(-mg\cos\alpha)}_{(m\vec{g}\cdot\hat{S}_\perp)}\underbrace{(\hat{e}_x \sin\alpha - \hat{e}_z\cos\alpha)}_{\text{siehe (13.3)}} \qquad (3)$$

$$\vec{Z}_1 = (m\vec{g}\cdot\hat{S}_\perp)(-\hat{S}_\perp) \qquad (4)$$



check: $= -m(-g\hat{e}_z)\cdot(-\hat{e}_x\sin\alpha + \hat{e}_z\cos\alpha)\,\hat{S}_\perp$

$$= mg\cos\alpha\,(-\hat{e}_x\sin\alpha + \hat{e}_z\cos\alpha) \checkmark$$

$$= (17.4)$$

Schritt 7: Diskussion $\quad \vec{Z}_1$ kompensiert Schwerkraftanteil $\perp$ zur schiefen Ebene [siehe (17.4)]

Bemerkung:

(16.5)

$$s(t) = -\frac{1}{2} t^2 g \sin\alpha + v_0 t + s_0 \quad (1)$$

$\boxed{L18}$

Bewegung entlang der $\hat{s}$ -Achse löst die effektive Bewegungs-Gleichung:

$$m \ddot{s} \, \vec{S}_{\parallel} = \underbrace{-mg \sin\alpha \, \hat{S}_{\parallel}}_{(m\vec{g} \cdot \hat{S}_{\parallel}) \hat{S}_{\parallel}} , \quad (2)$$

wobei: $\hat{S}_{\parallel} = (\hat{e}_x \cos\alpha + \hat{e}_z \sin\alpha)$ = Kraft $\parallel$ zur Ebene (3)

s(t) ist eine "verallgemeinerte Koordinate";

mit dem Ansatz

$$x(t) = s(t) \cos\alpha$$
$$y(t) = 0 \quad (4)$$
$$z(t) = s(t) \sin\alpha$$

wäre (18.2) sofort aus N2, $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}$ gefolgt, ohne dass es nötig gewesen wäre, Zwangskräfte zu berechnen.

Moral v.d. Geschichte: suche zunächst verallg. Koordinaten!!