Herleitung der LG 2. Art

$\upsilon 10 -$ 15.5.08 $\boxed{L37}$

Ausgangspunkt:
3N Koordinaten $\qquad x = (x_1, \ldots, x_{3N}) \qquad n = 1, \ldots 3N$

mit R Zwangsbedingungen: $\qquad g_\alpha(x) = 0 \,, \quad \alpha = 1, \ldots, R \qquad f = 3N - R$

Anzahl Freiheitsgrade

LG 1. Art
(Nz mit Zwangskräften): $\qquad m_n \ddot{x}_n = K_n + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha \,,$

Ziel: Wähle verallgemeinerte Koordinaten, $\quad q_\kappa \,, \quad \kappa = 1, \ldots, f$

so, dass die Zwangsbedingungen automatisch erfüllt sind; forme die LG 1. Art mittels der Variablen-Transformation x = x(q,t) so um, dass sie nur von q, $\dot{q}$ und t abhängen.

Vorschau auf das Endergebnis der Umformung:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_k} \,, \quad k = 1, \ldots, f}$$

"LG 2. Art"
"Euler-Lagrange-Gl."

Lagrange-Funktion:

$$\boxed{L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - U(q,\dot{q},t)}$$

Bemerkungen: LG2 = "Weltformel der Mechanik"!

$\boxed{L38}$

Lagrange-Gl. 2.ter Art sind f = 3N - R Differentialgleichungen 2. Ordnung für 3N - R Koordinaten, mit Anfangsbedingungen

$L(q,\dot{q},t)$ ist nicht eindeutig: verschiedene Wahl v. q möglich

$L(q,\dot{q},t)$ ist nicht messbar, aber sehr nützliche theoretische Größe!

Vorzüge der Lagrange-Gl. 2. Art:

(i) f = 3N - R Gleichungen

statt 3N + R Gleichungen bei Lagrange-Gl. 1

(ii) L ist ein Skalar, und somit viel leichter zu bestimmen als Bewegungsgleichungen (= Vektor-Gleichungen)

(iii) L hat oft eine sehr einfache Form

Erhaltungsgrößen:

$\boxed{L39}$

Def: "verallgemeinerte Impuls": (1)

Def: Falls $L = L(q_1, \dots q_f ; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ für ein bestimmtes κ nicht von q_κ abhängt, sondern nur von $\dot{q}_\kappa$, d.h. $\frac{\partial L}{\partial q_\kappa} = 0$, ist q_κ eine "zyklische Koordinate" (2)

Satz: Für eine zyklische Koordinate ist der verallg. Impuls erhalten.

(3)

Beweis:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\kappa}\right) \overset{L2}{=} \frac{\partial L}{\partial q_\kappa} \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow$$

Beispiel 2D harm. Oszillator:

$$L \overset{(35.1)}{=} \tfrac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2\right) - \tfrac{1}{2} k \rho^2 = L(\rho, \varphi ; \dot{\rho}, \dot{\varphi}) . \quad (4)$$

φ ist zyklisch: $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \rho \dot{\varphi}^2$ = Drehimpuls = erhalten (5)

Ausgangspunkt: LG 1. Art

$\boxed{L40}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{x} &= (x_1, \dots, x_{\tilde{N}}), \\ \dot{\vec{x}} &= (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{\tilde{N}}), \\ \vec{p} &= (m_1 \dot{x}_1, \dots, m_{\tilde{N}} \dot{x}_{\tilde{N}}) \end{aligned}\right\} \quad n = 1, \dots \tilde{N} \quad (1)$$

für N Teilchen in 3D

Zwangsbedingungen: $g_\alpha(\vec{x}, t) = g_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_{\tilde{N}}, t) = 0 \qquad \alpha = 1, \dots, R$ (2)

(3)

Zwangskräfte: $\vec{Z}_\alpha = \lambda_\alpha \vec{\nabla} g_\alpha = (Z_\alpha^1, \dots, Z_\alpha^{\tilde{N}}) \qquad \alpha = 1, \dots, R$

$Z_\alpha^n = \qquad n = 1, \dots, \tilde{N}$

LG1:

$$\dot{\vec{P}} = \vec{K} + \sum_{\alpha=1}^{R} \vec{Z}_\alpha \quad (4)$$

$\tilde{N}$ Gleichungen für die Komponenten $\dot{p}_n$:

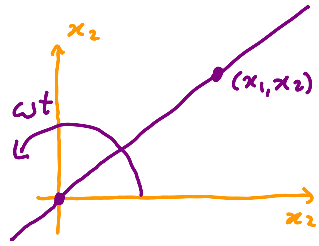
$$\dot{p}_n = m_n \ddot{x}_n = \quad (5)$$

Beispiel: Perle auf rotierender Stange

L41

Zwangsbedingung sei: $\varphi = \omega t$ (A)

Potenzial sei: $U = mg x_2$ (B)



$\vec{x} =$ $\qquad x_1 =$

$\tilde{N} =$ $\qquad x_2 =$ (1')

$\rho =$

$\varphi =$ (C)

ZB: $R =$ $\qquad g_1 =$ (2')

Richtung d. Zwangskraft bestimmt durch:

(siehe Zwischenrechnung)

$$\vec{\nabla} g_1 = \partial_n g_1 = (\partial_1 g_1, \partial_2 g_1) = \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right) \quad (3')$$

LGI:

$$m\ddot{x}_1 = 0 - \lambda x_2 / (x_1^2 + x_2^2)$$
$$m\ddot{x}_2 = -mg + \lambda x_1 / (x_1^2 + x_2^2) \quad (5')$$

Zwischenrechnungen

L41a

Zu (40.5'):

$$\partial_1 g = \frac{\partial}{\partial x_1} \arctan\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{(x_2/x_1)^2 + 1} \cdot \left(-\frac{x_2}{x_1^2}\right) = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} = -\frac{\sin\varphi}{\rho}$$

$$\partial_2 g = \frac{\partial}{\partial x_2} \arctan\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{(x_2/x_1)^2 + 1} \left(\frac{1}{x_1}\right) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{\cos\varphi}{\rho}$$

$$\partial_n g = \frac{1}{\rho}\left(-\sin\varphi\, \hat{e}_1 + \cos\varphi\, \hat{e}_2\right) = \frac{1}{\rho}\, \hat{e}_\varphi$$

Schritt 1: Einführung von Verallgemeinerten Koordinaten

Leitidee von LG2:
(für Situationen, wo man nicht an der genauen Form der Zwangskraft interessiert ist)

Wähle f "verallgemeinerte" oder "generalisierte" Koordinaten,

$$q = (q_1, \dots, q_f) \in \mathbb{R}^f, \qquad \text{mit} \qquad (1)$$

so, dass alle Zwangsbedingungen "automatisch" erfüllt sind:

$$(2)$$

für beliebige

Kurznotation: $\vec{x} = \quad , \quad q = (q_1, \dots, q_f); \ \dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$

Beispiel:

$$q_1 = \rho$$

ZB: $\varphi = \omega t$

$$x_1 = \rho \cos\varphi = \rho \cos\omega t = \qquad (1')$$

$$x_2 \overset{(41.1')}{=} \rho \sin\varphi = \rho \sin\omega t =$$

automatisch erfüllt

$$g_1 \overset{(41.2')}{=} \arctan\frac{x_2}{x_1} - \omega t \overset{(1')}{=} \qquad (2')$$

Schritt 2: Finde "erlaubte Hyperfläche"

Kettenregel

(Schnittmenge aller durch ZB festgelegten Hyperflächen)

$$g_\alpha(x(q,t)) \overset{(41.2)}{=} 0 \quad \forall \alpha: \quad \Rightarrow 0 = \frac{\partial g_\alpha(x(q,t),t)}{\partial q_K} = \quad \overset{(40.3)}{=} \qquad \forall \alpha = 1, \dots, R, \ \forall K = 1, \dots, f \qquad (1)$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\tilde{N}} A_n B_n = \vec{A} \cdot \vec{B}\right] \qquad (\perp HF_\alpha) \cdot (\parallel HF_\alpha)$$

Def:
"Virtuelle Verrückung": $(\delta\vec{x})_K \equiv \Big(\overbrace{\qquad\qquad}^{\tilde{N} \text{ Komponenten}} \Big) = \qquad K = 1, \dots, f \qquad (2)$

= Vektor parallel zu allen HF $_\alpha$ also eine Koordinatenänderung, die keine der ZB verletzt!

Die virt. Verrückungen, $K = 1, \dots, f$, bilden Basis für "erlaubte HF" am Punkt x:

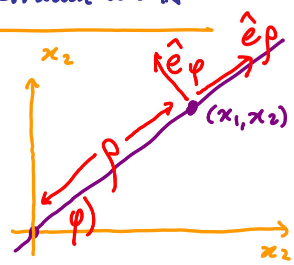
$$\text{Span}\left\{\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_f}\right\} = \text{erlaubte Hyperfläche} = \text{"Tangentenraum"} = \text{Unterraum von } \mathbb{R}^{\tilde{N}} \qquad (3)$$

Beispiel:

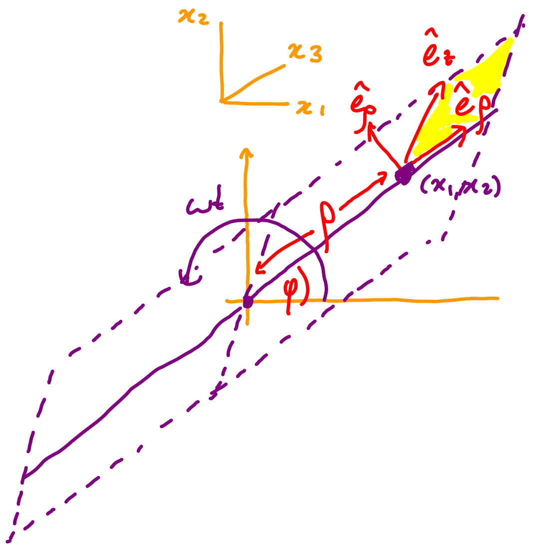
$x_1 = \rho \cos\varphi$
$x_2 = \rho \sin\varphi$

$$(\delta\vec{x})_1 \overset{(2)}{=} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \rho}, \frac{\partial x_2}{\partial \rho}\right) = \qquad (2')$$

erlaubte HF = (ändert sich mit t !) (3')



Beispiel in 3D: magnetische Scheibe auf rotierender Platte



Zylinderkoordinaten:

$$x_1 = \rho\cos\varphi$$
$$x_2 = \rho\sin\varphi$$
$$x_3 = z$$

Verallg. Koordinaten:

$$q_1 =$$
$$q_2 =$$

Virtuelle Verrückungen:

$$(\delta\vec{x})_{\kappa=} \overset{(42.2')}{=} \left(\frac{\partial x_1}{\partial}, \frac{\partial x_2}{\partial}, \frac{\partial x_3}{\partial}\right) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) = \hat{e}_\rho$$

$$(\delta\vec{x})_{\kappa=} \overset{(42.2')}{=} \left(\frac{\partial x_1}{\partial}, \frac{\partial x_2}{\partial}, \frac{\partial x_3}{\partial}\right) = (0, 0, 1) = \hat{e}_z$$

HF: aufgespannt durch $\hat{e}_\rho, \hat{e}_z$ = Platte!

Schritt 3: Projektion der Bwgl. auf erlaubte Hyperfläche

$$(LGI): \quad (\dot{\vec{p}} - \vec{K}) \overset{(40.4)}{=} \sum_{\alpha=1}^{R} \vec{Z}_\alpha \qquad (1)$$

"d'Alembertsches Prinzip":

Zwangsbedingungen sind somit komplett eliminiert!! (2)

Def: Verallg. Kraft: $Q_\kappa \equiv$ (3)

Kettenregel

für konservative Kräfte: $K_n = -\partial_n U(x)$

$$Q_\kappa = \qquad = \qquad (4)$$

$$\boxed{\dot{\vec{p}}\cdot(\delta\vec{x})_\kappa = \overset{(4)}{=} -\frac{\partial U(q,t)}{\partial q_\kappa}} \qquad (5)$$

Beispiel:

$$(m\ddot{\vec{x}} + mg\hat{z}_2)\cdot\hat{e}_\rho \overset{(1')}{=} 0: \quad \Rightarrow \qquad \overset{(1)'}{=} \qquad \overset{(*)}{=} \qquad (5')$$

$$U(\vec{x}) = mgx_2 \overset{(40.5')}{=} \qquad \overset{(42.2')}{} \qquad (*)$$

[unterschiedliche funktionale Abhängigkeiten !!

Schritt 4: $\dot{\vec{p}}$ durch $q, \dot{q}, t$ ausdrücken:

Schritt 4a: $\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt} \vec{x}\,(q(t), t) =$ (1)

$\frac{\partial\,(1)}{\partial \dot{q}_K}$: $\boxed{\quad = \quad}$ [Komponentenweise:] (2)

Beispiel: $\vec{x} \overset{(41.1)}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \omega t \\ \rho \sin \omega t \end{pmatrix}$ (A)

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} \overset{(A)}{=} \begin{pmatrix} \dot{\rho} \cos \omega t \\ \dot{\rho} \sin \omega t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\rho\omega \sin \omega t \\ \rho\omega \cos \omega t \end{pmatrix} \qquad (1')$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot{\rho}} \overset{(1')}{=} \qquad \overset{(A)}{=} \qquad (2')$$

Schritt 4: $\dot{\vec{p}}$ durch $q, \dot{q}, t$ ausdrücken:

Schritt 4b: Kinetische Energie T sei durch $q, \dot{q}, t$ ausgedrückt:

$$T(q, \dot{q}, t) = T(\dot{x}(q, \dot{q}, t)) = \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \tfrac{1}{2} m_n \, \dot{x}_n^2(q, \dot{q}, t) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial q_K} \overset{(1)}{=} \qquad = \qquad (2)$$

Kettenregel

$$\frac{\partial T(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_K} \overset{(1)}{=} \qquad = \qquad \overset{(45.2)}{=} \qquad (3)$$

$(\vec{3})$: $\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_K}\right] \overset{(3)}{=} \left[\vec{p} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_K}\right] =$ (4)

$(4) - (2)$: $\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_K}\right] - \frac{\partial T}{\partial q_K} =$ (5)

Projektion von auf die virtuelle Verrückung

Beispiel:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot\rho \cos\omega t \\ \dot\rho \sin\omega t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\rho\omega \sin\omega t \\ \rho\omega \cos\omega t \end{pmatrix} \quad (45.1')$$

(Seite 34)

$$= T(\rho,\dot\rho) = \tfrac{1}{2} m (\dot x_1^2 + \dot x_2^2) \quad (1')$$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = m\left(\dot x_1 \frac{\partial \dot x_1}{\partial \rho} + \dot x_2 \frac{\partial \dot x_2}{\partial \rho}\right) \overset{(45.1')}{=} m\left(-\dot x_1 \omega \sin\omega t + \dot x_2 \omega \cos\omega t\right) \quad (2')$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\rho} = m\left(\dot x_1 \frac{\partial \dot x_1}{\partial \dot\rho} + \dot x_2 \frac{\partial \dot x_2}{\partial \dot\rho}\right) \overset{(45.1')}{=} m\left[\dot x_1 \cos\omega t + \dot x_2 \sin\omega t\right] \quad (3')$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot\rho}\right] \overset{(3')}{=} m\ddot x_1 \cos\omega t - m\dot x_1 \omega \sin\omega t \quad (4')$$

$$+ m\ddot x_2 \sin\omega t + m\dot x_2 \omega \cos\omega t \quad (5')$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot\rho}\right] - \frac{\partial T}{\partial \rho} = m\left(\ddot x_1 \cos\omega t + \ddot x_2 \sin\omega t\right)$$

Damit haben wir (36.4) reproduziert!

Schritt 5: Kombiniere Ergebnisse von Schritten 3 und 4:

Schritt 4   Schritt 3

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \overset{(46.5)}{=} \dot{\vec{p}} \cdot (\delta \vec{x})_k \overset{(44.5)}{=} -\frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (1)$$

Hieraus folgt der Satz:

Für geschwindigkeitsunabhängige Potentiale, mit $\frac{\partial U}{\partial \dot q_k} = 0$ (2)

gilt: $\frac{d}{dt} \quad \overset{(1)}{=}$ (3)

Definiere "Lagrange-Funktion": $L(q,\dot q,t) = T(q,\dot q,t) - U(q,\dot q,t)$ (4)

Lagrange-Gl. 2. Art: $\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_k} \overset{(3)}{=} \frac{\partial}{\partial q_k} \quad , \quad k = 1,\dots,f}$ (5)

□