Herleitung der LG 2. Art

Ausgangspunkt: $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_{3N})$ $\quad n = 1, \ldots 3N$
3N Koordinaten

mit R Zwangsbedingungen: $g_\alpha(x) = 0 \,, \quad \alpha = 1, \ldots, R$ $\quad f = 3N - R$ Anzahl Freiheitsgrade

LG 1. Art
(Nz mit Zwangskräften): $m_n \ddot{x}_n = K_n + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha \,, \quad , \quad n = 1, \ldots, 3N$

Ziel: Wähle verallgemeinerte Koordinaten, $q_\kappa \,, \quad \kappa = 1, \ldots, f$

so, dass die Zwangsbedingungen automatisch erfüllt sind; forme die LG 1. Art mittels der Variablen-Transformation x = x(q,t) so um, dass sie nur von $q, \dot{q}$ und t abhängen.

Vorschau auf das Endergebnis der Umformung:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_k} \,, \quad k = 1, \ldots, f}$$

"LG 2. Art"
"Euler-Lagrange-Gl."

Lagrange-Funktion: $$\boxed{L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - U(q,\dot{q},t)}$$

Bemerkungen: LG2 = "Weltformel der Mechanik"!

Lagrange-Gl. 2.ter Art sind f = 3N - R Differentialgleichungen 2. Ordnung für 3N - R Koordinaten, mit Anfangsbedingungen $q_\kappa(0) = \ldots, \quad \dot{q}_\kappa(0) = \ldots$

$L(q,\dot{q},t)$ ist nicht eindeutig: verschiedene Wahl v. q möglich

$L(q,\dot{q},t)$ ist nicht messbar, aber sehr nützliche theoretische Größe!

Vorzüge der Lagrange-Gl. 2. Art:

(i) f = 3N - R Gleichungen für $\ddot{q}_\kappa = \ldots$

statt 3N + R Gleichungen für $\ddot{x}_n = \ldots, g_\alpha = 0$ bei Lagrange-Gl. 1

(ii) L ist ein Skalar, und somit viel leichter zu bestimmen als Bewegungsgleichungen (= Vektor-Gleichungen)

(iii) L hat oft eine sehr einfache Form

(iv) Erhaltungsgrößen lassen sich leicht von L ablesen

Erhaltungsgrößen:

Def: "verallgemeinerte Impuls": $$p_\kappa = \frac{\partial L}{\partial \dot q_\kappa} \qquad (1)$$

zB: freies Teilchen
$$L = \frac{1}{2} m \dot x^2$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot x} = m \dot x = p$$

Def: Falls $L = L(q_1, \dots q_f; \dot q_1, \dots, \dot q_f)$ für ein bestimmtes κ nicht von q_κ abhängt, sondern nur von $\dot q_\kappa$, d.h. $\frac{\partial L}{\partial q_\kappa} = 0$, ist q_κ eine "zyklische Koordinate" (2)

Satz: Für eine zyklische Koordinate ist der verallg. Impuls erhalten. (3)

Beweis:
$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_\kappa}}_{p_\kappa}\Big)_{(1)} \overset{L2}{=} \frac{\partial L}{\partial q_\kappa} \overset{(2)}{=} 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} p_\kappa = 0 \Rightarrow p_\kappa = \text{konst.}$$

Beispiel 2D harm. Oszillator:
$$L \overset{(35.1)}{=} \frac{1}{2} m (\dot\rho^2 + \rho^2 \dot\varphi^2) - \frac{1}{2} k \rho^2 = L(\rho, \cancel{\varphi}; \dot\rho, \dot\varphi) \,. \qquad (4)$$

φ ist zyklisch: $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m\rho^2\dot\varphi$ = Drehimpuls = erhalten (5)

Ausgangspunkt: LG 1. Art

$$\left.\begin{aligned} \vec x &= (x_1, \dots, x_{\tilde N}), \\ \dot{\vec x} &= (\dot x_1, \dots, \dot x_{\tilde N}), \\ \vec p &= (m_1 \dot x_1, \dots, m_{\tilde N} \dot x_{\tilde N}) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$n = 1, \dots \tilde N = 3N$ für N Teilchen in 3D

$\vec x, \dot{\vec x}, \vec p \in \mathbb{R}^{\tilde N}$

Zwangsbedingungen: $g_\alpha(\vec x, t) = g_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_{\tilde N}, t) = 0 \qquad \alpha = 1, \dots, R \qquad (2)$

Zwangskräfte: $\vec Z_\alpha = \lambda_\alpha \vec\nabla g_\alpha = (Z_\alpha^1, \dots, Z_\alpha^{\tilde N}) \in \mathbb{R}^{\tilde N} \qquad \alpha = 1, \dots, R \qquad (3)$

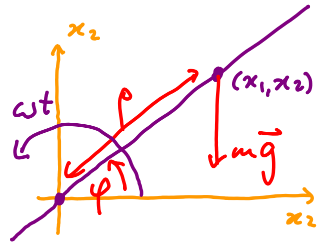
$\vec Z_\alpha \perp HF_\alpha \qquad Z_\alpha^n = \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \quad (3a) \qquad n = 1, \dots, \tilde N$

LGI:
$$\dot{\vec p} = \vec K + \sum_{\alpha=1}^{R} \vec Z_\alpha \qquad (4)$$

$\tilde N$ Gleichungen für die Komponenten p_n:
$$\dot p_n = m_n \ddot x_n = K_n + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}, \quad \forall\, n = 1, \dots, \tilde N \qquad (5)$$

Beispiel: Perle auf rotierender Stange

L41



Zwangsbedingung sei: $\varphi = \omega t$ (A)

Potenzial sei: $U = mgx_2$ (B)

$\vec{x} = (x_1, x_2)$

$\tilde{N} = 2$

$$x_1 = \rho\cos\varphi \qquad x_2 = \rho\sin\varphi \qquad (1')$$

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \qquad \varphi = \arctan\frac{x_2}{x_1} \qquad (c)$$

ZB: $R = 1$

$$g_1 = \underbrace{\arctan\frac{x_2}{x_1}}_{\varphi} - \omega t = 0 \qquad (2')$$

(siehe Zwischenrechnung)

Richtung d. Zwangskraft bestimmt durch: (Komponenten: $\partial_n g_1$)

$$\vec{\nabla} g_1 = (\partial_1 g_1, \partial_2 g_1) = \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right) \qquad (3')$$

LG1:

$$m\ddot{x}_1 = 0 - \lambda x_2/(x_1^2 + x_2^2)$$
$$m\ddot{x}_2 = -mg + \lambda x_1/(x_1^2 + x_2^2) \qquad (5')$$

Zwischenrechnungen

L41a

Zu (40.5'):

$$\partial_1 g = \frac{\partial}{\partial x_1}\arctan\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{(x_2/x_1)^2 + 1}\cdot\left(-\frac{x_2}{x_1^2}\right) = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} = -\frac{\sin\varphi}{\rho}$$

$$\partial_2 g = \frac{\partial}{\partial x_2}\arctan\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{(x_2/x_1)^2 + 1}\left(\frac{1}{x_1}\right) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{\cos\varphi}{\rho}$$

$$\partial_n g = \frac{1}{\rho}\left(-\sin\varphi\,\hat{e}_1 + \cos\varphi\,\hat{e}_2\right) = \frac{1}{\rho}\hat{e}_\varphi$$

Schritt 1: Einführung von Verallgemeinerten Koordinaten

Leitidee von LG2:
(für Situationen, wo man nicht an der genauen Form der Zwangskraft interessiert ist)

Wähle f "verallgemeinerte" oder "generalisierte" Koordinaten,

$$q=(q_1,\dots,q_f)\in\mathbb{R}^f, \quad \text{mit} \quad \vec{x}=\vec{x}(q,t) \qquad (1)$$

so, dass alle Zwangsbedingungen "automatisch" erfüllt sind:

$$g_\alpha\big(x_1(q,t),\dots,x_{\tilde N}(q,t)\big)=0 \text{ für beliebige } q,t \qquad (2)$$

Kurznotation: $\vec x = \vec x(q,t)$, $q=(q_1,\dots,q_f)$; $\dot q=(\dot q_1,\dots,\dot q_f)$

Beispiel:

$q_1=\rho$, $R=1$

ZB: $\varphi=\omega t$

$$x_1 = \rho\cos\varphi = \rho\cos\omega t = x_1(\rho,t) \qquad (1')$$
$$x_2 \overset{(41.1')}{=} \rho\sin\varphi = \rho\sin\omega t = x_2(\rho,t)$$

automatisch erfüllt

$$g_1 \overset{(41.2')}{=} \arctan\frac{x_2}{x_1} - \omega t \overset{(1')}{=} \arctan\left(\frac{\sin\omega t}{\cos\omega t}\right)-\omega t \overset{!}{=} 0 \qquad (2')$$

Schritt 2: Finde "erlaubte Hyperfläche"

(Schnittmenge aller durch ZB festgelegten Hyperflächen)

$$g_\alpha(x(q,t)) \overset{(41.2)}{=} 0 \quad \forall\alpha: \Rightarrow 0 = \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha(x(q,t),t)}{\partial q_K} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{n=1}^{\tilde N}\lambda_\alpha \underbrace{\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}}_{(40.3a)\ Z_\alpha^n}\frac{\partial x_n}{\partial q_K} \overset{(40.3)}{=} \underbrace{\vec Z_\alpha}_{(\perp HF_\alpha)}\cdot\underbrace{(\delta\vec x)_K}_{(\parallel HF_\alpha)} \qquad (1)$$

$\forall\alpha=1,\dots,R$
$\forall K=1,\dots,f$

$$\left[\sum_{n=1}^{\tilde N} A_n B_n = \vec A\cdot\vec B\right] \qquad \vec A,\vec B\in\mathbb{R}^{\tilde N}$$

Def:
"Virtuelle Verrückung":

$$(\delta\vec x)_K \equiv \overbrace{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_K},\dots,\frac{\partial x_{\tilde N}}{\partial q_K}\right)}^{\tilde N\ \text{Komponenten}} = \frac{\partial\vec x}{\partial q_K}\in\mathbb{R}^{\tilde N} \qquad K=1,\dots,f \qquad (2)$$

= Vektor parallel zu allen HF $_\alpha$ also eine Koordinatenänderung, die keine der ZB verletzt!

Die virt. Verrückungen, $K=1,\dots,f$, bilden Basis für "erlaubte HF" am Punkt x:

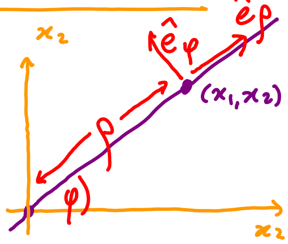
$$\text{Span}\left\{\frac{\partial\vec x}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial\vec x}{\partial q_f}\right\} \quad \begin{aligned}&= \text{erlaubte Hyperfläche}\\ &= \text{"Tangentenraum"}\\ &= \text{Unterraum von } \mathbb{R}^{\tilde N}\end{aligned} \qquad (3)$$

Beispiel: $q_1=\rho$

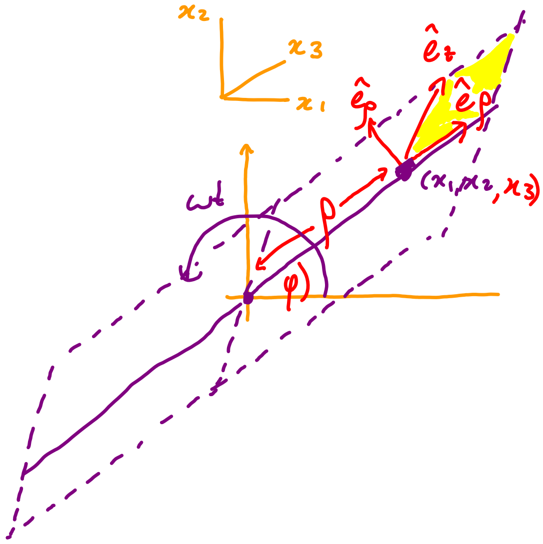
$x_1=\rho\cos\varphi$
$x_2=\rho\sin\varphi$

$$(\delta\vec x)_1 \overset{(2)}{=} \left(\frac{\partial x_1}{\partial\rho}, \frac{\partial x_2}{\partial\rho}\right) = (\cos\varphi,\sin\varphi)=\hat e_\rho \qquad (2')$$

erlaubte HF $= \hat e_\rho$-Achse (ändert sich mit t!) (3')



Beispiel in 3D: magnetische Scheibe auf rotierender Platte



Zylinderkoordinaten: $x_1 = \rho \cos\varphi$

$x_2 = \rho \sin\varphi$

$x_3 = z$

Verallg. Koordinaten: $q_1 = \rho$

$q_2 = z$

Virtuelle Verrückungen:

$$(\delta\vec{x})_{\kappa=1} \overset{(42.2')}{=} \left(\frac{\partial x_1}{\partial\rho}, \frac{\partial x_2}{\partial\rho}, \frac{\partial x_3}{\partial\rho}\right) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) = \hat{e}_\rho$$

$$(\delta\vec{x})_{\kappa=2} \overset{(42.2')}{=} \left(\frac{\partial x_1}{\partial z}, \frac{\partial x_2}{\partial z}, \frac{\partial x_3}{\partial z}\right) = (0, 0, 1) = \hat{e}_z$$

HF: aufgespannt durch $\hat{e}_\rho, \hat{e}_z$ = Platte!

Schritt 3: Projektion der Bwgl. auf erlaubte Hyperfläche

$$(\text{LGl})\cdot(\delta\vec{x})_\kappa : \quad (\dot{\vec{p}} - \vec{K})\cdot(\delta\vec{x})_\kappa \overset{(40.4)}{=} \sum_{\alpha=1}^{R} \overbrace{\vec{Z}_\alpha\cdot(\delta\vec{x}_\kappa)}^{(42.1)\; = 0 \;\forall \alpha} = 0 \qquad (1)$$

$\forall\ \kappa = 1, \dots, f$

"d'Alembertsches Prinzip": $\vec{K}\cdot(\delta\vec{x})_\kappa = \dot{\vec{p}}\cdot(\delta\vec{x})_\kappa$ (2)

Zwangsbedingungen sind somit komplett eliminiert!!

Def: Verallg. Kraft: $Q_\kappa \equiv \vec{K}\cdot(\delta\vec{x})_\kappa \quad \forall\ \kappa = 1, \dots, f$ (3)

für konservative Kräfte: $K_n = -\partial_n U(x)$ (*)

$$Q_\kappa = \sum_{n=1}^{\tilde{N}} (-)\frac{\partial U(x(q,t),t)}{\partial x_n}\,\frac{\partial x_n}{\partial q_\kappa} = -\frac{\partial U(q,t)}{\partial q_\kappa} \qquad (4)$$

(*) (42.2) Kettenregel

$$\boxed{\dot{\vec{p}}\cdot(\delta\vec{x})_\kappa \overset{(2)}{=} Q_\kappa \overset{(4)}{=} -\frac{\partial U(q,t)}{\partial q_\kappa}} \qquad \kappa = 1, \dots, f \qquad (5)$$

Beispiel:

$$(m\ddot{\vec{x}} + \underbrace{mg\hat{x}_2}_{-\vec{K}})\cdot\hat{e}_\rho \overset{(1')}{=} 0 : \quad \Rightarrow \quad m(\ddot{x}_1\cos\varphi + \ddot{x}_2\sin\varphi) \overset{(1)'}{=} -mg\sin\varphi \overset{(*)}{=} -\frac{\partial U(\rho,t)}{\partial\rho} \qquad (5')$$

$(m\ddot{x}_1, m\ddot{x}_2 + mg)\cdot(\cos\varphi, \sin\varphi)$ (42.2')

konsistent mit (5)

$U(\vec{x}) = mg x_2 \overset{(40.5')}{=} mg\,\rho\sin\varphi =: U(\rho)$ (*)

[unterschiedliche funktionale Abhängigkeiten !!

Schritt 4: $\dot{\vec{p}}$ durch $q, \dot q, t$ ausdrücken:

Schritt 4a:

$\sum_n A_n y_n + b = c$

$\frac{\partial c}{\partial y_k} = A_k$ $\qquad \frac{\partial (1)}{\partial \dot q_k}$:

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}\vec{x}(q(t),t) = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k}\underbrace{\frac{dq_k}{dt}}_{=\dot q_k} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \dot{\vec{x}}(q,\dot q, t) \quad (1)$$

$$\boxed{\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot q_k} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k}} \qquad \left[\text{Komponentenweise: } \frac{\partial \dot x_n}{\partial \dot q_k} = \frac{\partial x_n}{\partial q_k}\right] \quad (2)$$

Beispiel:

$$\vec{x} \overset{(41.1)}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\omega t \\ \rho \sin\omega t \end{pmatrix} \quad (A)$$

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} \overset{(A)}{=} \begin{pmatrix} \dot\rho\cos\omega t \\ \dot\rho\sin\omega t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\rho\omega\sin\omega t \\ \rho\omega\cos\omega t \end{pmatrix} \quad (1')$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot\rho} \overset{(1')}{=} \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} \overset{(A)}{=} \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \rho}\right) \quad (2')$$

Schritt 4: $\dot{\vec{p}}$ durch $q, \dot q, t$ ausdrücken:

Schritt 4b:

Kinetische Energie T sei durch $q, \dot q, t$ ausgedrückt:

$$T(q,\dot q,t) = T(\dot x(q,\dot q,t)) = \sum_{n=1}^{\tilde N} \tfrac{1}{2} m_n \dot x_n^2(q,\dot q,t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial T(q,\dot q,t)}{\partial q_k} \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{\tilde N} \overbrace{m_n \dot x_n}^{p_n} \frac{\partial \dot x_n}{\partial q_k} = \vec{p}\cdot \boxed{\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial q_k}} \to \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{d\vec{x}}{dt} \quad (2)$$

Kettenregel

$$\frac{\partial T(q,\dot q,t)}{\partial \dot q_k} \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{\tilde N} \overbrace{m_n \dot x_n}^{p_n} \frac{\partial \dot x_n}{\partial \dot q_k} = \vec{p}\cdot\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot q_k} \overset{(45.2)}{=} \vec{p}\cdot\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \quad (3)$$

=

$$\frac{d}{dt}(3): \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right] \overset{(3)}{=} \frac{d}{dt}\left[\vec{p}\cdot\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k}\right] = \dot{\vec{p}}\cdot\underbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k}}_{(42.2)} + \vec{p}\cdot\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k}} \quad (4)$$

$$(4)-(2): \quad \boxed{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right] - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \dot{\vec{p}}\cdot(\delta\vec{x})_k} \quad (5)$$

Projektion von $\quad$ auf die virtuelle Verrückung

Beispiel:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} \overset{(45.1')}{=} \begin{pmatrix} \dot\rho \cos\omega t \\ \dot\rho \sin\omega t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\rho\omega \sin\omega t \\ \rho\omega \cos\omega t \end{pmatrix} \quad (45.1')$$

(Seite 34)

$$\frac{m}{2}(\dot\rho^2+\omega^2\rho^2) = T(\rho,\dot\rho) = \frac{1}{2}m(\dot x_1^2 + \dot x_2^2) \quad (1')$$

$$m\omega^2\rho = \frac{\partial T}{\partial\rho} = m\left(\dot x_1 \frac{\partial \dot x_1}{\partial\rho} + \dot x_2 \frac{\partial \dot x_2}{\partial \rho}\right) \overset{(45.1')}{=} m\left(-\dot x_1 \omega \sin\omega t + \dot x_2 \omega\cos\omega t\right) \quad (2')$$

$$m\dot\rho = \frac{\partial T}{\partial\dot\rho} = m\left(\dot x_1 \frac{\partial \dot x_1}{\partial\dot\rho} + \dot x_2 \frac{\partial \dot x_2}{\partial\dot\rho}\right) \overset{(45.1')}{=} m\left[\dot x_1 \underset{①}{\cos\omega t} + \dot x_2 \underset{②}{\sin\omega t}\right] \quad (3')$$

$$m\ddot\rho = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot\rho}\right] \overset{(3')}{=} m\ddot x_1 \cos\omega t - m\dot x_1 \omega \sin\omega t \quad ① \quad (4')$$

$$+ m\ddot x_2 \sin\omega t + m\dot x_2 \omega\cos\omega t \quad ② \quad (5')$$

$$m(\ddot\rho - \rho\omega^2) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial\dot\rho}\right] - \frac{\partial T}{\partial\rho} \overset{(4')-(2')}{=} m\left(\ddot x_1 \cos\omega t + \ddot x_2 \sin\omega t\right) = m\ddot{\vec{x}}\cdot\hat e_\rho$$

Damit haben wir (36.4) reproduziert!

Schritt 5: Kombiniere Ergebnisse von Schritten 3 und 4:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \overset{\substack{\text{Schritt 4}\\(46.5)}}{=} \dot{\vec p}\cdot(\delta\vec x)_k \overset{\substack{\text{Schritt 3}\\(44.5)}}{=} -\frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (1)$$

Hieraus folgt der Satz:
Für geschwindigkeitsunabhängige Potentiale, mit $\frac{\partial U}{\partial\dot q_k} = 0$ (2)

gilt:
(aus (1)).

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(T-U)}{\partial\dot q_k}\right] \overset{(1)}{=} \frac{\partial(T-U)}{\partial q_k} \quad (3)$$

Definiere "Lagrange-Funktion":

$$L(q,\dot q,t) = T(q,\dot q,t) - U(q,\dot q,t) \quad (4)$$

Lagrange-Gl. 2. Art:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_k} \overset{(3)}{=} \frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad k = 1,\dots,f} \quad (5)$$

$\square$