Herleitung der LG 2. Art

v10 – 15.5.08 L37

Ausgangspunkt:
3N Koordinaten
$$x = (x_1, \ldots, x_{3N}) \qquad n = 1, \ldots 3N$$

mit R Zwangsbedingungen:
$$g_\alpha(x) = 0\,, \quad \alpha = 1, \ldots, R \qquad f = 3N - R$$

Anzahl Freiheitsgrade

LG 1. Art
(Nz mit Zwangskräften):
$$m_n \ddot{x}_n = K_n + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha \partial_n g_\alpha\,,$$

Ziel: Wähle verallgemeinerte Koordinaten, $q_\kappa\,, \quad \kappa = 1, \ldots, f$

so, dass die Zwangsbedingungen automatisch erfüllt sind; forme die LG 1. Art mittels der Variablen-Transformation x = x(q,t) so um, dass sie nur von q, $\dot{q}$ und t abhängen.

Vorschau auf das Endergebnis der Umformung:
$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_k}\,, \quad k = 1, \ldots, f}$$

"LG 2. Art"
"Euler-Lagrange-Gl."

Lagrange-Funktion:
$$\boxed{L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - U(q,\dot{q},t)}$$

Bemerkungen: LG2 = "Weltformel der Mechanik"!

L38

Lagrange-Gl. 2.ter Art sind f = 3N - R Differentialgleichungen 2. Ordnung für 3N - R Koordinaten, mit Anfangsbedingungen $q(0)$, $\dot{q}(0)$.

$L(q,\dot{q},t)$ ist nicht eindeutig: verschiedene Wahl v. q möglich

$L(q,\dot{q},t)$ ist nicht messbar, aber sehr nützliche theoretische Größe!

Vorzüge der Lagrange-Gl. 2. Art:

(i) f = 3N - R Gleichungen für $\ddot{q}_\alpha$,

statt 3N + R Gleichungen für $\ddot{x}_n$, $g_\alpha = 0$ bei Lagrange-Gl. 1

(ii) L ist ein Skalar, und somit viel leichter zu bestimmen als Bewegungsgleichungen (= Vektor-Gleichungen)

(iii) L hat oft eine sehr einfache Form !

Erhaltungsgrößen:

Def: "verallgemeinerte Impuls": $p_\kappa \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot q_\kappa}$ (1)

Def: Falls $L = L(q_1, \dots q_f; \dot q_1, \dots, \dot q_f)$ für ein bestimmtes κ nicht von q_κ abhängt, sondern nur von $\dot q_\kappa$, d.h. $\frac{\partial L}{\partial q_\kappa} = 0$, ist q_κ eine "zyklische Koordinate" (2)

Satz: Für eine zyklische Koordinate ist der verallg. Impuls erhalten.

Beweis: (3)

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\kappa}\right)}_{(1)\ p_\kappa} \overset{L2}{=} \frac{\partial L}{\partial q_\kappa} \overset{(2)}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d p_\kappa}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\kappa = \text{konst!!}$$

Beispiel 2D harm. Oszillator:

$$L \overset{(35.1)}{=} \frac{1}{2} m \left(\dot\rho^2 + \rho^2 \dot\varphi^2\right) - \frac{1}{2} k \rho^2 = L(\rho, \cancel{\varphi}; \dot\rho, \dot\varphi) \,. \tag{4}$$

φ ist zyklisch: $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m\rho\dot\varphi^2$ = Drehimpuls = erhalten (5)

Ausgangspunkt: LG 1. Art

$$\left.\begin{aligned} \vec x &= (x_1, \dots, x_{\tilde N}), \\ \dot{\vec x} &= (\dot x_1, \dots, \dot x_{\tilde N}), \\ \vec p &= (m_1 \dot x_1, \dots, m_{\tilde N} \dot x_{\tilde N}) \end{aligned}\right\} \quad n = 1, \dots \tilde N = 3N \text{ für } N \text{ Teilchen in 3D} \tag{1}$$

$\vec x, \dot{\vec x}, \vec p \in \mathbb{R}^{\tilde N}$

Zwangsbedingungen: $g_\alpha(\vec x, t) = g_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_{\tilde N}, t) = 0 \qquad \alpha = 1, \dots, R$ (2)

Zwangskräfte: $\vec Z_\alpha = \lambda_\alpha \vec\nabla g_\alpha = (Z_\alpha^1, \dots, Z_\alpha^{\tilde N}) \in \mathbb{R}^N \qquad \alpha = 1, \dots, R$ (3)

$\vec Z_\alpha \perp HF_\alpha$

$$Z_\alpha^n = \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \qquad n = 1, \dots, \tilde N$$

LG1:

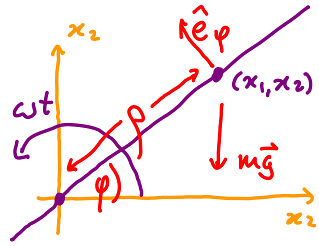
$$\dot{\vec p} = \vec K + \sum_{\alpha=1}^{R} \vec Z_\alpha \tag{4}$$

$\tilde N$ Gleichungen für die Komponenten p_n:

$$\dot p_n = m_n \ddot x_n = K_n + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n} \qquad \forall\, n = 1, \dots, \tilde N \tag{5}$$

Beispiel: Perle auf rotierender Stange

L41



Zwangsbedingung sei: $\varphi = \omega t$ (A)

Potenzial sei: $U = m g x_2$ (B)

$\vec{x} = (x_1, x_2)$ $\quad x_1 = \rho \cos\varphi$

(1')

$\tilde{N} = 2$ $\quad x_2 = \rho \sin\varphi$

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

(C)

$$\varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1}$$

ZB: $R = 1$ $\quad g_1 = \underbrace{\arctan \frac{x_2}{x_1}}_{\varphi} - \omega t = 0$ (2')

(siehe Zwischenrechnung)

Richtung d. Zwangskraft bestimmt durch:

$$\vec{\nabla} g_1 = \partial_n g_1 = (\partial_1 g_1, \partial_2 g_1) = \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right) = \frac{1}{\rho} \hat{e}_\varphi \quad (3')$$

LG1:

$$m \ddot{x}_1 = 0 - \lambda x_2 / (x_1^2 + x_2^2)$$

$$m \ddot{x}_2 = -mg + \lambda x_1 / (x_1^2 + x_2^2) \quad (5')$$

Zwischenrechnungen

L41a

Zu (40.5'):

$$\partial_1 g = \frac{\partial}{\partial x_1} \arctan \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{(x_2/x_1)^2 + 1} \cdot \left(-\frac{x_2}{x_1^2} \right) = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} = -\frac{\sin\varphi}{\rho}$$

$$\partial_2 g = \frac{\partial}{\partial x_2} \arctan \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{(x_2/x_1)^2 + 1} \left(\frac{1}{x_1} \right) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{\cos\varphi}{\rho}$$

$$\partial_n g = \frac{1}{\rho} \left(-\sin\varphi \, \hat{e}_1 + \cos\varphi \, \hat{e}_2 \right) = \frac{1}{\rho} \hat{e}_\varphi$$

Schritt 1: Einführung von Verallgemeinerten Koordinaten

L42

Leitidee von LG2:
(für Situationen, wo man nicht an der genauen Form der Zwangskraft interessiert ist)

Wähle f "verallgemeinerte" oder "generalisierte" Koordinaten,

$$q = (q_1, \ldots, q_f) \in \mathbb{R}^f, \quad \text{mit} \quad \vec{x} = \vec{x}(q,t) \qquad (1)$$

so, dass alle Zwangsbedingungen "automatisch" erfüllt sind:

$$g_\alpha\big(x_1(q,t), \ldots, x_{\tilde{N}}(q,t)\big) = 0 \quad \text{für beliebige} \quad q, t \qquad (2)$$

Kurznotation: $\vec{x} = \vec{x}(q,t)$, $q = (q_1, \ldots, q_f)$; $\dot{q} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f)$

Beispiel:

$$q_1 = \rho, \quad R = 1$$

ZB: $\varphi = \omega t$

$$x_1 = \rho\cos\varphi = \rho\cos\omega t = x_1(\rho,t) \qquad (1')$$

$$x_2 \overset{(41.1')}{=} \rho\sin\varphi = \rho\sin\omega t = x_2(\rho,t)$$

automatisch erfüllt

$$g_1 \overset{(41.2')}{=} \arctan\frac{x_2}{x_1} - \omega t \overset{(1')}{=} \arctan\left(\frac{\sin\omega t}{\cos\omega t}\right) - \omega t = 0 \qquad (2')$$

Schritt 2: Finde "erlaubte Hyperfläche"

L42

(Schnittmenge aller durch ZB festgelegten Hyperflächen)

$\forall \alpha = 1, \ldots, R$, $\forall K = 1, \ldots, f$

$$g_\alpha(x(q,t)) \overset{(41.2)}{=} 0 \;\; \forall\alpha: \;\Rightarrow\; 0 = \lambda_\alpha \frac{\partial g_\alpha(x(q,t),t)}{\partial q_K} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \lambda_\alpha \underbrace{\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_n}}_{Z_\alpha^n} \frac{\partial x_n}{\partial q_K} \overset{(40.3)}{=} \underbrace{\vec{Z}_\alpha}_{(\perp HF_\alpha)} \cdot \underbrace{(\delta\vec{x})_K}_{(\parallel HF_\alpha)} \qquad (1)$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\tilde{N}} A_n B_n = \vec{A}\cdot\vec{B}\right]$$

Def:
"Virtuelle Verrückung":

$$(\delta\vec{x})_K \equiv \overbrace{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_K}, \ldots, \frac{\partial x_{\tilde{N}}}{\partial q_K}\right)}^{\tilde{N}\ \text{Komponenten}} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial q_K} \in \mathbb{R}^{\tilde{N}} \qquad K = 1, \ldots, f \qquad (2)$$

= Vektor parallel zu allen HF_α also eine Koordinatenänderung, die keine der ZB verletzt!

Die virt. Verrückungen, $K = 1, \ldots, f$, bilden Basis für "erlaubte HF" am Punkt x:

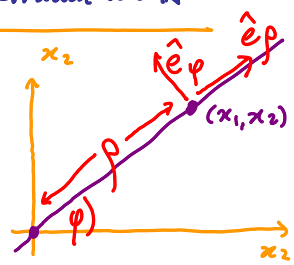
$$\operatorname{Span}\left\{\frac{\partial\vec{x}}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial\vec{x}}{\partial q_f}\right\} = \text{erlaubte Hyperfläche} = \text{"Tangentenraum"} = \text{Unterraum von } \mathbb{R}^{\tilde{N}} \qquad (3)$$

Beispiel:

$x_1 = \rho\cos\varphi$
$x_2 = \rho\sin\varphi$

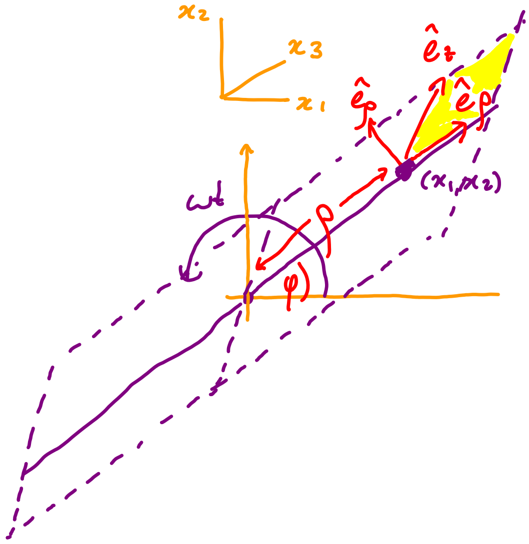
$$(\delta\vec{x})_1 \overset{(2)}{=} \left(\frac{\partial x_1}{\partial\rho}, \frac{\partial x_2}{\partial\rho}\right) = (\cos\varphi, \sin\varphi) = \hat{e}_\rho \qquad (2')$$

erlaubte HF = $\hat{e}_\rho$ - Achse (ändert sich mit t !) (3')



Beispiel in 3D: magnetische Scheibe auf rotierender Platte

L43



Zylinderkoordinaten: $x_1 = \rho \cos\varphi$

$x_2 = \rho \sin\varphi$

$x_3 = z$

Verallg. Koordinaten: $q_1 = \rho$

$q_2 = z$

Virtuelle Verrückungen:

$$(\delta \vec{x})_{\kappa=1} \overset{(42.2')}{=} \left(\frac{\partial x_1}{\partial \rho}, \frac{\partial x_2}{\partial \rho}, \frac{\partial x_3}{\partial \rho}\right) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) = \hat{e}_\rho$$

$$(\delta \vec{x})_{\kappa=2} \overset{(42.2')}{=} \left(\frac{\partial x_1}{\partial z}, \frac{\partial x_2}{\partial z}, \frac{\partial x_3}{\partial z}\right) = (0, 0, 1) = \hat{e}_z$$

HF: aufgespannt durch $\hat{e}_\rho, \hat{e}_z$ = Platte!

Schritt 3: Projektion der Bwgl. auf erlaubte Hyperfläche

L44

$(LGI)\cdot(\delta\vec{x})_\kappa$; $\quad (\dot{\vec{p}} - \vec{K})\cdot(\delta\vec{x})_\kappa \overset{(40.4)}{=} \sum_{\alpha=1}^{R} \overbrace{\vec{Z}_\alpha \cdot (\delta\vec{x}_\kappa)}^{(42.1)\,=\,0 \ \forall \alpha} = 0$ (1)

$\forall\ \kappa = 1, \dots, f$

"d'Alembertsches Prinzip": $(\dot{\vec{p}} - \vec{K})\cdot(\delta\vec{x})_\kappa = 0$ (2)

Zwangsbedingungen sind somit komplett eliminiert!!

Def: Verallg. Kraft: $Q_\kappa \equiv \vec{K}\cdot(\delta\vec{x})_\kappa \quad \forall\ \kappa = 1, \dots, f$ (3)

für konservative Kräfte: $K_n = -\partial_n U(x)$

$$Q_\kappa = \sum_n (-)\frac{\partial U(\vec{x}(\tilde{q},t),t)}{\partial x_n}\,\frac{\partial x_n}{\partial q_\kappa} = -\frac{\partial U(\tilde{q},t)}{\partial q_\kappa} \quad (4)$$

(42.2)

Kettenregel

$$\boxed{\dot{\vec{p}}\cdot(\delta\vec{x})_\kappa \overset{(2)}{=} Q_\kappa \overset{(4)}{=} -\frac{\partial U(q,t)}{\partial q_\kappa}} \quad (5)$$

Beispiel:

$(m\ddot{\vec{x}} + mg\,\hat{z}_2)\cdot\hat{e}_\rho \overset{(1')}{=} 0: \ \Rightarrow\ m(\ddot{x}\cos\varphi + \ddot{y}\sin\varphi) \overset{(1)'}{=} -mg\sin\varphi \overset{(*)}{=} -\frac{\partial U(\rho,t)}{\partial\rho}$ (5')

$(m\ddot{x}, m\ddot{y}+mg)\cdot(\cos\varphi, \sin\varphi)$ ← (42.2')

$U(\vec{x}) = mg x_2 \overset{(40.5')}{=} mg\rho\sin\varphi = U(\rho)$ (*)

[unterschiedliche funktionale Abhängigkeiten !!

Schritt 4: $\dot{\vec{p}}$ durch $q, \dot{q}, t$ ausdrücken:

Schritt 4a:

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d}{dt}\vec{x}(q(t),t) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k}\overset{\dot{q}_k}{\frac{\partial q_k}{\partial t}} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \dot{\vec{x}}(q,\dot{q},t) \quad (1)$$

$Ax + B = C, \; \frac{\partial C}{\partial x} = A:$

$$\frac{\partial (1)}{\partial \dot{q}_k}: \quad \boxed{\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k}} \qquad \left[\text{Komponentenweise: } \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_n}{\partial q_k}\right] \quad (2)$$

Beispiel:

$$\vec{x} \overset{(41.1)}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\omega t \\ \rho\sin\omega t \end{pmatrix} \quad (A)$$

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} \overset{(A)}{=} \begin{pmatrix} \dot{\rho}\cos\omega t \\ \dot{\rho}\sin\omega t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\rho\omega\sin\omega t \\ \rho\omega\cos\omega t \end{pmatrix} \quad (1')$$

$$\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot{\rho}} \overset{(1')}{=} \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} \overset{(A)}{=} \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \rho}\right) \quad (2')$$

Schritt 4: $\dot{\vec{p}}$ durch $q, \dot{q}, t$ ausdrücken:

Schritt 4b:

Kinetische Energie T sei durch $q, \dot{q}, t$ ausgedrückt:

$$T(q,\dot{q},t) = T(\dot{x}(q,\dot{q},t)) = \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \tfrac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2(q,\dot{q},t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial T(q,\dot{q},t)}{\partial q_k} \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \overbrace{m_n \dot{x}_n}^{p_n} \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial q_k} = \vec{p}\cdot \boxed{\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial q_k}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \quad (2)$$

Kettenregel

$$\frac{\partial T(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \overbrace{m_n \dot{x}_n}^{p_n} \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_k} = \vec{p}\cdot\frac{\partial \dot{\vec{x}}}{\partial \dot{q}_k} \overset{(45.2)}{=} \vec{p}\cdot\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}(3): \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right] \overset{(3)}{=} \frac{d}{dt}\left[\vec{p}\cdot\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k}\right] = \dot{\vec{p}}\cdot\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} + \vec{p}\cdot\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k}} \quad (4)$$

$$(4)-(2): \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right] - \frac{\partial T}{\partial q_k} = \dot{\vec{p}}\cdot(\delta\vec{x})_k \quad (5)$$

(42.2)

Projektion von $\dot{\vec{p}}$ auf die virtuelle Verrückung $(\delta\vec{x})_k$

Beispiel:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot\rho \cos\omega t \\ \dot\rho \sin\omega t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\rho\omega \sin\omega t \\ \rho\omega \cos\omega t \end{pmatrix} \quad (45.1')$$

L47

(Seite 34)

$$m(\dot\rho^2 + \omega^2\rho^2) = T(\rho, \dot\rho) = \tfrac{1}{2} m (\dot x_1^2 + \dot x_2^2) \quad (1')$$

$$m\rho\omega^2 \overset{(1')}{=} \frac{\partial T}{\partial \rho} = m\left(\dot x_1 \frac{\partial \dot x_1}{\partial \rho} + \dot x_2 \frac{\partial \dot x_2}{\partial \rho}\right) \overset{(45.1')}{=} m\left(-\dot x_1 \omega \sin\omega t + \dot x_2 \omega \cos\omega t\right) \quad (2')$$

$$m\dot\rho \overset{(1')}{=} \frac{\partial T}{\partial \dot\rho} = m\left(\dot x_1 \frac{\partial \dot x_1}{\partial \dot\rho} + \dot x_2 \frac{\partial \dot x_2}{\partial \dot\rho}\right) \overset{(45.1')}{=} m\left[\dot x_1 \cos\omega t + \dot x_2 \sin\omega t\right] \quad (3')$$

$$m\ddot\rho \overset{(3')}{=} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot\rho}\right] \overset{(3')}{=} m\ddot x_1 \cos\omega t - m\dot x_1 \omega \sin\omega t \quad (4')$$

$$+ m\ddot x_2 \sin\omega t + m\dot x_2 \omega \cos\omega t \quad (5')$$

$$\underline{m(\ddot\rho - \rho\omega^2)} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot\rho}\right] - \frac{\partial T}{\partial \rho} = m\left(\ddot x_1 \cos\omega t + \ddot x_2 \sin\omega t\right) = \underline{m\ddot{\vec{x}} \cdot \hat e_\rho}$$

$= (46.5)$ ✓

Damit haben wir (36.4) reproduziert!

L48

Schritt 5: Kombiniere Ergebnisse von Schritten 3 und 4:

Schritt 4 — Schritt 3

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \overset{(46.5)}{=} \dot{\vec{p}} \cdot (\delta \vec x)_k \overset{(44.5)}{=} -\frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (1)$$

Hieraus folgt der Satz:
Für geschwindigkeitsunabhängige Potentiale, mit $\frac{\partial U}{\partial \dot q_k} = 0 \quad (2)$

gilt:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T - \overset{0}{U})}{\partial \dot q_k}\right] \overset{(1)}{=} \frac{\partial (T-U)}{\partial q_k} \quad (3)$$

Definiere "Lagrange-Funktion":

$$L(q, \dot q, t) = T(q, \dot q, t) - U(q, \dot q, t) \quad (4)$$

Lagrange-Gl. 2. Art:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} \overset{(3)}{=} \frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, f} \quad (5)$$

□