Allgemeine Eigenschaften v. verallgemeinerten Koordinaten

[Nachtrag zu V10 vom 16.05.08] **1**

Koordinatenvektor: $\vec{r} = x_1 \hat{e}_1 + \dots + x_{\tilde{N}} \hat{e}_{\tilde{N}}$ (Cartesisch) (1a)

Komponentendarstellung: $:= (x_1, x_2, \dots, x_{\tilde{N}})$ (z.B. $\tilde{N} = 3N$) (1b)

$(x_i = \vec{r} \cdot \hat{e}_i)$

Cartesische Einheitsvekt.: $\boxed{\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}}$ $\forall\ i,j = 1, \dots, 3\tilde{N}$ (2)

$\vec{w}$ sei allgemeiner Vektor in Cartesischen Koord.: $\vec{W} = \sum_i x_i \hat{e}_i := (w_1, \dots, w_{\tilde{N}})$ (3)

Verallgemeinerte Koordinaten: $q = (q_1, \dots, q_\kappa)$ sei $x_i = x_i(q_1, \dots, q_f, t)$, $\forall\ x_i = 1, \dots, \tilde{N}$ (4)

Ziel: wir suchen verallg. Einheitsvektoren, $\hat{e}_{q_\kappa}$, mit $\boxed{\hat{e}_{q_\kappa} \cdot \hat{e}_{q_{\kappa'}} = \delta_{\kappa\kappa'}}$ $\forall\ \kappa, \kappa' = 1, \dots, f$ (5)

Dann kann $\vec{W}$ in verallg. Koord. dargestellt werden als: $\vec{W} = \sum_{\kappa=1}^{f} w_{q_\kappa} \hat{e}_{q_\kappa}$, mit $w_{q_\kappa} = \vec{w} \cdot \hat{e}_{q_\kappa}$ (6)

[Projektion v. $\vec{w}$ in $\hat{e}_{q_\kappa}$-Richtung]

Konstruktion d. $\hat{e}_{q_\kappa}$: (nutzt die linearen Unabhängigkeit d. q_κ) **2**

Verallg. Koord. müssen per Definition so gewählt sein, dass sie linear unabhängig sind. D.h., die sog. virtuelle Verrückungen: $(\delta\vec{r})_{q_\kappa} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\kappa} := \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_\kappa}, \dots, \frac{\partial x_{\tilde{N}}}{\partial q_\kappa} \right)$ (7)

"wie ändert sich $\vec{r}$ mit q_κ?"

müssen orthogonal zueinander stehen: $(\delta\vec{r})_{q_\kappa} \cdot (\delta\vec{r})_{q_{\kappa'}} = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\kappa}\right)\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_{\kappa'}}\right) \equiv 0$ falls $\kappa \neq \kappa'$ (8)

Forderung an (4)

(Änderung v. $\vec{r}$ mit q_κ) muss orthogonal sein zu (Änderung v. $\vec{r}$ mit $\kappa' \neq \kappa$)

Def: lokales Vielbein an Einheitsvektoren für verallg. Koordinaten: $\hat{e}_{q_\kappa} := \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\kappa}\right)}_{= (\delta\vec{r})_{q_\kappa}} \frac{1}{b_{q_\kappa}} = \frac{1}{b_\kappa} \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_\kappa}, \dots \frac{\partial x_{\tilde{N}}}{\partial q_\kappa} \right)$ (9a)

"in welche Richtung ändert sich $\vec{r}$ mit q_κ?"

Normierungsfaktor garantiert $|\hat{e}_{q_\kappa}| = 1$: $b_{q_\kappa} := \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\kappa} \right|$ (9b)

[Komponente v. $\hat{e}_{q_\kappa}$ in $\hat{e}_i$-Richtung: $\frac{1}{b_\kappa}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\kappa}\right) = (\hat{e}_{q_\kappa})_i = \hat{e}_{q_\kappa} \cdot \hat{e}_i$] (9c)

Die Konstruktion (9) hat die gewünschte Orthogonalitätseigenschaft (5):

Check: $$\hat e_{q_k}\cdot \hat e_{q_{k'}} \overset{(9a)}{=} \frac{(\delta\vec r)_{q_k}}{b_k}\cdot\frac{(\delta \vec r)_{q_{k'}}}{b_{k'}} \overset{(8)}{=} \delta_{kk'}\frac{(\delta\vec r)^2_{q_k}}{b_k^2} \overset{(9b)}{=} \delta_{kk'} \;\checkmark\; = (5)$$

Beispiel: finde Geschwindigkeit ($\vec v$) und Beschleunigung ($\vec a$) in verallg. Koordinaten!

In Cartesischen Koordinaten:

Ort: $$\vec r = x_1\hat e_1 + x_2 \hat e_2 + x_3\hat e_3 \qquad (10a)$$

Geschwindigkeit: $$\dot{\vec r} = \dot x_1 \hat e_1 + \dot x_2 \hat e_2 + \dot x_3\hat e_3 =: \vec v \qquad (10b)$$

Beschleunigung: $$\ddot{\vec r} = \ddot x_1 \hat e_1 + \ddot x_2 \hat e_2 + \ddot x_3\hat e_3 =: \vec a \qquad (10c)$$

[Beachte: $\dot{\hat e}_i = 0$ Cartesische Einheitsvektoren sind Orts- und zeitunabhängig: $\frac{d\hat e_i}{dt} = 0$]

Berechne nun in verallg. Koord., durch explizites Ableiten von (6) und (7):

$$x_i = x_i(q_k, t) \qquad (11a)$$

$$\dot x_i = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial x_i}{\partial t} \qquad (11b)$$

$$\ddot x_i = \sum_{k,k'}\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_{k'}\partial q_k}\dot q_{k'}\dot q_k + \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\ddot q_k + \sum_k\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k\partial t} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \qquad (11c)$$

Geschwindigkeit: $$\vec v = \sum_k v_{q_k}\hat e_{q_k}, \quad \text{mit} \qquad (12a)$$

$$(\dot x_1, \dot x_2, \dot x_3)\begin{pmatrix}(e_{q_k})_1\\(e_{q_k})_2\\(e_{q_k})_3\end{pmatrix} = v_{q_k} = \overbrace{\vec v\cdot\hat e_{q_k} = \sum_i \dot x_i}^{(10b)}\,\overbrace{(\hat e_{q_k})_i = \sum_i \dot x_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)\frac{1}{b_k}}^{(9c)} \qquad (12b)$$

setze ein: (11b)

Beschleunigung: $$\vec a = \sum_k a_{q_k}\hat e_{q_k}, \quad \text{mit} \qquad (13a)$$

setze ein: (11c)

$$(\ddot x_1, \ddot x_2, \ddot x_3)\begin{pmatrix}(e_{q_k})_1\\(e_{q_k})_2\\(e_{q_k})_3\end{pmatrix} = a_{q_k} = \overbrace{\vec a\cdot\hat e_{q_k} = \sum_i \ddot x_i}^{(10c)}\,\overbrace{(\hat e_{q_k})_i = \sum_i \ddot x_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)\frac{1}{b_k}}^{(9c)} \qquad (13)$$

Alternativ: $(\dot{\vec{p}})_{q_k}$ via T: es ist in der Regel einfacher, die Beschl. via T zu berechnen:

Projeziert $\dot{\vec{p}}$ in die Richtung $(\delta\vec{r})_{q_k}$

Es gilt:

(siehe L46.5)

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\right)} = (\dot{\vec{p}})\cdot(\delta\vec{r})_{q_k}$$

(13a) (9a)

$$= \sum_{k'=1}^{f} \left((\dot{\vec{p}})_{q_{k'}}\,\hat{e}_{q_{k'}}\right)\cdot\left(b_k\,\hat{e}_{q_k}\right) = (\dot{\vec{p}})_{q_k}\, b_{q_k}$$

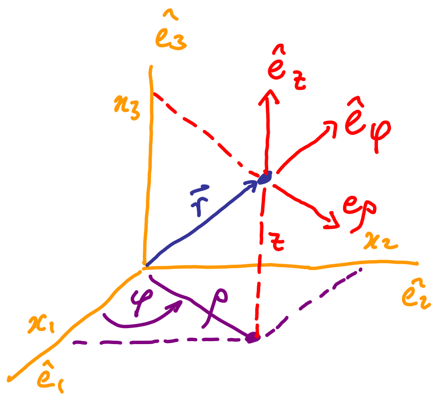
Impulsänderung pro Zeit in $\hat{e}_{q_k}$-Richtung:

$$\boxed{(\dot{\vec{p}})_{q_k} = \frac{1}{b_{q_k}}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right]} \qquad (14)$$

Beispiel: Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) $\quad (\tilde{N} = 3, \quad f = 3)$

Koordinatenvektor: $\vec{r} \overset{(1a)}{=} x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3$

Cartesische Komponenten $\overset{(1b)}{:=} (x_1, x_2, x_3)$



Zylinderkoordinaten:

$(q_1, q_2, q_3) = (\rho, \varphi, z)$

$$x_1 \overset{(4)}{=} \rho\cos\varphi, \quad x_2 \overset{(4)}{=} \rho\sin\varphi, \quad x_3 \overset{(4)}{=} z \qquad (15)$$

(1a)'

Virtuelle Verrückungen (7) und Normierungsfaktoren (9b)

$$(\delta\vec{r})_\rho = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad b_\rho = 1 \qquad (16a)$$

$$(\delta\vec{r})_\varphi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \rho(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \qquad b_\varphi = \rho \qquad (16b)$$

$$(\delta\vec{r})_z = \frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = (0, 0, 1), \qquad b_z = 1 \qquad (16c)$$

Einheitsvektoren (9a):

$$\hat{e}_\rho \overset{(9a)}{=} (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \quad (17a) \qquad \hat{e}_\rho\cdot\hat{e}_\varphi = 0 \ ✓$$

$$\hat{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad (17b) \qquad \hat{e}_\rho\cdot\hat{e}_z = 0 \ ✓$$

$$\hat{e}_z = (0, 0, 1) \quad (17c) \qquad \hat{e}_\varphi\cdot\hat{e}_z = 0 \ ✓$$

7

(1b)' :

Geschwindigkeitskomponenten (Cartesisch), (16) und (15)

$$\dot{x}_1 = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\,\dot{\varphi} \qquad (18a)$$
$$\dot{x}_2 = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\,\dot{\varphi} \qquad (18b)$$
$$\dot{x}_3 = \dot{z} \qquad (18c)$$

(1c)' :

Geschw. in Zylinderkoord: (12b) und (18)

$$\hat{e}_\rho \overset{(17a)}{=} \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$v_\rho = \dot{x}_1\cos\varphi + \dot{x}_2\sin\varphi + \dot{x}_3\, 0 \qquad (19a)$$
$$= \dot{\rho}\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} + \rho\dot{\varphi}\underbrace{(-\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi)}_{=0} = \dot{\rho}$$

$$\hat{e}_\varphi \overset{(17b)}{=} \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$v_\varphi = \dot{x}_1(-\sin\varphi) + \dot{x}_2\cos\varphi + 0 \qquad (19b)$$
$$= \dot{\rho}\underbrace{(\cos\varphi(-\sin\varphi) + \sin\varphi\cos\varphi)}_{=0} + \rho\dot{\varphi}\underbrace{((-\sin\varphi)^2 + \cos^2\varphi)}_{=1} = \rho\dot{\varphi}$$

$$\hat{e}_z \overset{(17c)}{=} \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

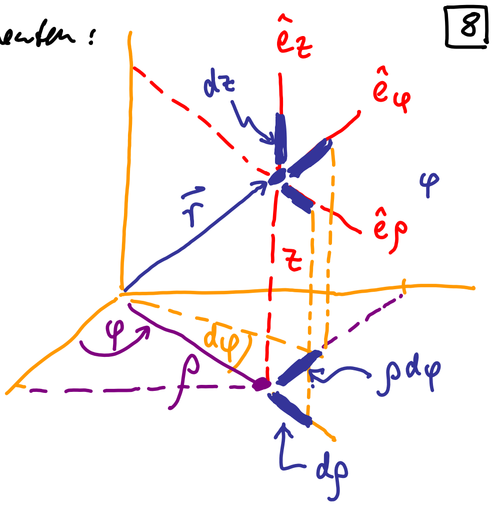
$$v_z = \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0) + \dot{x}_3(1) = \dot{z} \qquad (19c)$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi + \dot{z}\,\hat{e}_z} \qquad (20)$$

8

(1d)' Geometrische Interpretation der Geschwindigkeitskomponenten:

In Zeit dt ändern sich: $\rho \to \rho + d\rho$,
$\varphi \to \varphi + d\varphi$,
$z \to z + dz$



Dadurch ändert sich $\vec{r} \to \vec{r} + d\vec{r}$, d.h. um

$d\rho$ in $\hat{e}_\rho$-Richtung, d.h. $v_\rho = \frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho}$

$\rho\, d\varphi$ in $\hat{e}_\varphi$-Richtung, d.h. $v_\varphi = \rho\frac{d\varphi}{dt} = \rho\dot{\varphi}$

dz in $\hat{e}_z$-Richtung, d.h. $v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$

(1e)'

Kinetische Energie:
mittels (10b) und (18):

$$T = \tfrac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^{\,2} = \tfrac{1}{2}m\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i^2$$
$$= \tfrac{1}{2}m\left[(\dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\,\dot{\varphi})^2 + (\dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\,\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}m\left[\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right] \qquad (21a)$$

Konsistent!

Schnellere Alternative: direkt in Zylinder-Koord. mittels (19), (20):

$$T = \tfrac{1}{2}m\sum_{k=1}^{3} v_{q_k}^2 = \tfrac{1}{2}m\left[\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2\right] \qquad (21b)$$

(19)' Beschleunigung:

$q_1 = \rho$: $\quad (\dot{\vec{p}})_\rho \overset{(14)}{=} \frac{1}{b_\rho}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\rho}\right) - \frac{\partial T}{\partial \rho}\right] \overset{(21)}{=} m\big(\underbrace{\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2}_{a_\rho}\big)$ (22a)

$b_\rho \overset{(16a)}{=} 1$

$q_2 = \varphi$: $\quad (\dot{\vec{p}})_\varphi \overset{(14)}{=} \frac{1}{b_\varphi}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi}\right] \overset{(21)}{=} \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left[m\rho^2\dot\varphi\right] = (\underbrace{2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi}_{a_\varphi})$ (22b)

$b_\varphi \overset{(16b)}{=} \rho$

$q_3 = z$: $\quad (\dot{\vec{p}})_z \overset{(14)}{=} \frac{1}{b_z}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot z}\right) - \frac{\partial T}{\partial z}\right] \overset{(21)}{=} m\underbrace{\ddot z}_{a_z}$ (22c)

$b_z \overset{(16c)}{=} 1$

Folglich:
$$\boxed{\vec a \overset{(22)}{=} (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\,\hat e_\rho + (2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi)\,\hat e_\varphi + \ddot z\,\hat e_z} \quad (23)$$

(19)' Alternativ, über Cartesische Komponenten:

Beschleunigungskomp. (Cartesisch), (11c) und (18)

$$\ddot x_1 = \ddot\rho\cos\varphi - 2\dot\rho\sin\varphi\,\dot\varphi - \rho\cos\varphi\,\dot\varphi^2 - \rho\sin\varphi\,\ddot\varphi \quad (24a)$$
$$\ddot x_2 = \ddot\rho\sin\varphi + 2\dot\rho\cos\varphi\,\dot\varphi - \rho\sin\varphi\,\dot\varphi^2 + \rho\cos\varphi\,\ddot\varphi \quad (24b)$$
$$\ddot x_3 = \ddot z \quad (24c)$$

Zylinderkoord.: (13),(16) und (19):

$a_\rho = (\ddot x_1, \ddot x_2, \ddot x_3)\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}$

$$a_\rho = \ddot x_1\cos\varphi + \ddot x_2\sin\varphi + 0$$
$$= \ddot\rho\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} + 2\dot\rho\dot\varphi\underbrace{(-\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi)}_{=0}$$
$$-\rho\dot\varphi^2\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} + \rho\ddot\varphi\underbrace{(-\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi)}_{=0}$$
$$= \boxed{\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2 = a_\rho} = (22a)\ \checkmark \quad (25a)$$

$a_\varphi = (\ddot x_1, \ddot x_2, \ddot x_3)\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$

$$a_\varphi = \ddot x_1(-\sin\varphi) + \ddot x_2\cos\varphi$$
$$= \ddot\rho\underbrace{[\cos\varphi(-\sin\varphi) + \sin\varphi\cos\varphi]}_{=0} + 2\dot\rho\dot\varphi\underbrace{[+\sin^2\varphi + \cos^2\varphi]}_{=1}$$
$$-\rho\dot\varphi^2\underbrace{[-\sin\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi]}_{=0} + \rho\ddot\varphi\underbrace{[\sin^2\varphi + \cos^2\varphi]}_{=1}$$
$$= \boxed{\rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi = a_\varphi} = (22b)\ \checkmark \quad (25b)$$

$$a_z = (\ddot x_1, \ddot x_2, \ddot x_3)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \boxed{\ddot z = a_z} = (22c)\ \checkmark \quad (25c)$$

$$\boxed{\vec a = (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\,\hat e_\rho + (\rho\ddot\varphi + 2\dot\rho\dot\varphi)\,\hat e_\varphi + \ddot z\,\hat e_z} \quad (26) = (23)\ \checkmark$$