Krummlinige Koordinaten   V11   19.05.08

[es gibt keine Seiten L37-L41, wegen Nummerierungsfehler]

L42

Für 1 Teilchen: $x_n = x_n(q)$ ← z.B. Polar, Kugel (1)

Dann: $T = \frac{1}{2} m \dot{x}_n \dot{x}_n$ (2)

Grund für diesen Namen: "metrischer Tensor"

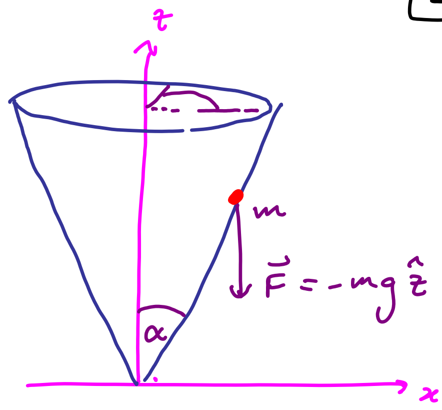
(Einsteinsche Summen-Konvention) $ds^2 = dx_n dx_n = \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} dq_i dq_j = g_{ij} dq_i dq_j$ (3)

Nachrechnen ! : $g_{ij}^{\text{Cartesisch}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, (4) $g_{ij}^{\text{Polar}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \rho^2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ (5)

$g_{ij}^{\text{Kugel}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$ (6)

Beispiel: Massenpunkt auf Kreiskegel

L43



Zwangsbedingung:

$g(x,y,z) =$ (1)

Wahl v. q's: (Kugelkoordinaten) (2)

(Alternativen oder wären auch OK)

$x = \quad x(r,\varphi)$ (3)

$y = \quad y(r,\varphi)$ (4)

$z = \quad z(r,\varphi)$ (5)

Bestimmung v. L:

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} m \, g_{ij}^{Kugel} \dot{q}_i \dot{q}_j$ (1)

(2)

Potenzielle Energie: $U = mgz =$ (3)

$L = (r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) = T - U =$ (4)

unabhängig v. φ! $\Rightarrow$ (5)

Erhaltener verallg. Impuls: $\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \overset{(4)}{=}}$ (6)

L44

L45

LG2: $0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$ (1)

$q = r$: $0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial}\right) - \frac{\partial L}{\partial}$ (2)

$=$ (3)

$q = \varphi$: $0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial}\right) - \frac{\partial L}{\partial}$ (4)

$=$ [Konsistent mit] (5)

Energieerhaltung: $\frac{\partial L}{\partial t} \overset{(44.6)}{=} 0 \xRightarrow{\text{(siehe L54)}}$ Gesamtenergie (6)

$\text{const.} = E = T + U =$ (7)

Lösung der Bwgsgl.

L46

(44.6) löst (45.5): $\ell \overset{(44.6)}{=} m r^2 \sin^2\alpha \, \dot\varphi \xrightarrow[\text{nach } \dot\varphi]{\text{Aufgelöst}} \dot\varphi \overset{(44.6)}{=}$ (1)

(46.1) in (45.7): $E \overset{(45.7)}{=} \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2 \dot\varphi^2 \sin^2\alpha\right) + mgr\cos\alpha$ (2)

$=$ (3)

Effektives Potential: $U_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha$ (4)

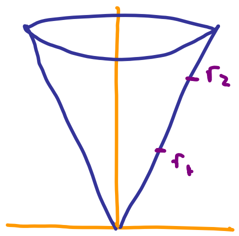
Zentrifugalbarriere bestraft kleine r:

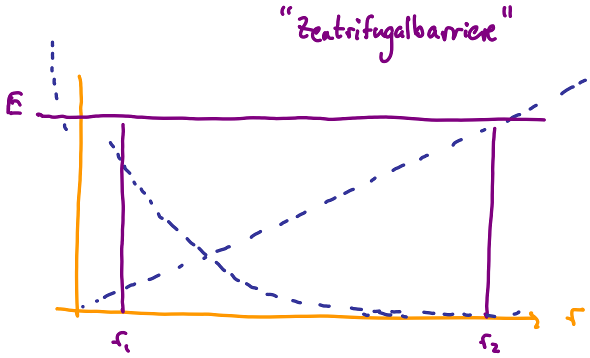
wenn $r \to 0$

mit $\ell \sim r^2\dot\varphi = \text{konst}$

dann

und





$r = r(t)$?

L47

$\dot r \overset{(46.2)}{=}$ (1)

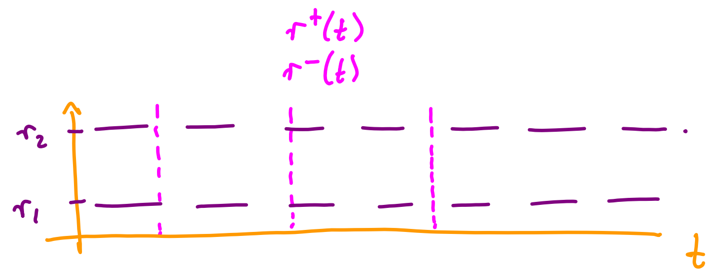
zwei Lösungen, im Folgenden durch "±" unterschieden.

Trennung der Variablen und Integrieren:

$$dt = dr \, \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{eff}(r)\right]}}$$ (2)

im Prinzip bekannte Funktion v. t
(Integral analytisch oder numerisch lösen)

(3) Invertieren: $r =$ auch bekannt (3)



$\varphi(t) = ?$

$$\dot\varphi \overset{(46.1)}{=} \frac{\ell}{m r^2 \sin^2\alpha} = \frac{d\varphi}{dt}$$

L48

(1)

$$d\varphi = dt \, \frac{\ell}{m\, r^2(t) \sin^2\alpha}$$ (2)

(47.4) einsetzen

im Prinzip bekannte Funktion v. t
(Integral analytisch oder numerisch lösen)

Integrationskonstanten: festgelegt durch Anfangsbedingungen:

$r(t) = \quad , \quad \varphi(t) = \quad , \quad \dot r(t) = \quad , \quad \dot\varphi(t) =$ (3)

$$\overset{(47.1)}{=} \sqrt{\tfrac{2}{m}\left[E - U_{eff}(r)\right]} \qquad \overset{(46.1)}{=} \frac{\ell}{m r^2 \sin^2\alpha}$$ (4)

oder alternativ: $\ell,\ E,\ r_0,\ \varphi_0$

$\boxed{\text{Jeder Erhaltungssatz legt eine Integrationskonstante fest!}}$

Bahn: $r = r(\varphi)$?

Bereits bekannt (zumindest im Prinzip):

L49

$r = r(t) \qquad \varphi = \varphi(t)$ (1)

Eliminiere t:

$$\frac{dr}{d\varphi} =$$ (2)

$$=$$ (3)

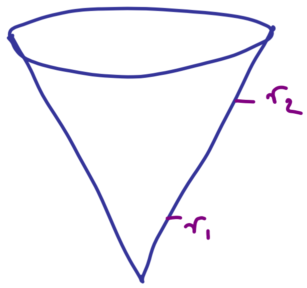
Integriere:

$$d\varphi = dr \, \frac{1}{\left[\sqrt{\tfrac{2}{m}(E - U_{eff}(r))}\ \tfrac{1}{\ell}\, m r^2 \sin^2\alpha\right]}$$ (4)

im Prinzip bekannte Funktion v. r
(Integral analytisch oder numerisch lösen)

$\Rightarrow \quad \varphi = \varphi(r) = \quad , \quad \Rightarrow \quad r = r(\varphi)$

Wann ist Bahn geschlossen?



L50

Falls $\varphi(T+t_0) = \varphi(t_0)$

$r(T+t_0) = r(t_0)$, etc.

Dauer von

$r_2 \to r_1 \to r_2 : T$

Hängt von α, ℓ, E, etc. ab.

Falls Bewegung periodisch ist: was ist Periode?

Periode:
$$dt' \overset{(47.2)}{=} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r')\right)}} \qquad (1)$$

Erhaltungssätze und Symmetrien

L51a

1. Satz:

L sei invariant unter Raumtranslation, $\vec{r}_\nu \to$ (1)

Dann ist der Gesamtimpuls erhalten, $\sum_\nu \vec{p}_\nu$ (2)

2. Satz:

L sei invariant unter Raumrotationen, $\vec{r}_\nu \to$ (3)

Dann ist der Gesamtdrehimpuls erhalten, $\sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{p}_\nu$ (4)

3. Satz:

L sei invariant unter Zeitverschiebungen, $t \to$ (5)

Dann ist die Hamiltonfunktion erhalten, $H = \sum_\nu \vec{p}_\nu \cdot \dot{\vec{r}}_\nu - L$ (6)

(Gesamtenergie)

1. Satz: Raumtranslationsinvariant

$\boxed{L5b}$

Raumtranslationen: $\vec{r}_\nu \longrightarrow \vec{r}_\nu{}' =$ (1a)

(Raumverschiebungen) $\dot{\vec{r}}_\nu \longrightarrow \dot{\vec{r}}_\nu{}' \overset{(1a)}{=}$ ← gleiche Verschiebung $\forall\ \nu$. (1b)

Annahme: L sei

invariant unter (1): $L(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t) =$ (2)

$\overset{(1)}{=}$ (3)

$L(\vec{r}+\varepsilon\vec{\eta})$
$\xrightarrow{\varepsilon\to 0} L(\vec{r})+$ $\Bigg\}\Rightarrow$ $\xrightarrow[\text{Taylor-Ent.}]{} L(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t) +$ (4)

(3) gilt $\forall\ \vec{\eta} \Rightarrow$ $0 \overset{(4)}{=}$ $\overset{(LG2)}{=}$ (5)

$\square$

Gesamtimpuls ist erhalten

Schwerpunktskoordinate ist hier die zyklische Koordinate: $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \vec{r}_\nu \xrightarrow{(1a)} \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu$ (6)

2. Satz: Rotationsinvariant

(Änderung $\perp$ zu $\vec{r}$ $\Rightarrow$ Rotation) $\boxed{L52}$

Rotationen: $\vec{r}_\nu \longrightarrow \vec{r}_\nu{}' =$ (1a)

$\dot{\vec{r}}_\nu \longrightarrow \dot{\vec{r}}_\nu{}' \overset{(1b)}{=}$ (1b)

Annahme: L sei

invariant unter (1): $L(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t) =$ (2)

$=$ (3)

$L(\vec{r}+\varepsilon\vec{\eta}\times\vec{r})$
$\xrightarrow{\varepsilon\to 0} L(\vec{r})+$
$= L(\vec{r})+$ $\Bigg\}\Rightarrow$ $\xrightarrow[\text{Taylor-Ent.}]{} L(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t) + \big[\quad + \quad \big]$ (4)

(3) gilt $\forall\ \vec{\eta} \Rightarrow$

Produktregel rückwärts

$0 \overset{(4)}{=}$ $=$ (5)

Gesamtdrehimpuls ist erhalten! $\square$

3. Satz: Raumtranslationsinvariant

L53

Zeittranslationen: (Zeitverschiebungen) $t \to t' = \qquad , \quad \vec{r} \to \vec{r}\,' = $ (1a)

$\dot{\vec{r}} \to \dot{\vec{r}}\,' \overset{(1)}{=}$ (1b)

Annahme: L sei invariant unter (1):

$L(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t) = \qquad = $ (2)

$\xrightarrow[\text{Taylor-Ent.}]{} L(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t) + \qquad \Longrightarrow$ (4)

Betrachte nun totale Zeitableitung:

$\frac{d}{dt} L(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t) = \Big[\qquad + \qquad \Big]$ (5)

$=$ (6)

(5)-(6) = 0:

$\frac{d}{dt} \Big[\qquad \Big] = 0$ (7)

(8) "Hamilton-Funktion" ist erhalten

L54

Def. d. Hamilton-Funktion: $H = \sum_\nu \vec{p}_\nu \cdot \dot{\vec{r}}_\nu - L$ (1)

Für $\vec{p}_\nu = m\dot{\vec{r}}_\nu$ (bisher übliche Fall)

$H \overset{(1)}{=}$ (2)

$=$ (3)

$=$ (4)

Interpretation: Hamilton-Funktion = Energie!

Energie-Erhaltungssatz: $\boxed{\frac{\partial L}{\partial t} = \overset{(53.7)}{\Rightarrow} \frac{d}{dt} H = }$ (5)

Gilt entlang der 3N-Trajektorie, die durch LG 2 festgelegt wird.