Krummlinige Koordinaten V11 19.05.08

[es gibt keine Seiten L37-L41, wegen Nummerierungsfehler] L42

Für 1 Teilchen: $x_n = x_n(q)$ (1)

z.B. Polar : (ρ, φ, z)
Kugel : (r, θ, φ)

Dann: $T = \frac{1}{2} m \dot{x}_n \dot{x}_n = \frac{1}{2} m \sum_n \underbrace{\frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_j}}_{\equiv\, g_{ij}} \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_j}{dt} = \frac{1}{2} m\, g_{ij}\, \dot{q}_i \dot{q}_j$ (2)

(Einsteinsche Summen-Konvention $\sum_{n=1}^{3}$)

"metrischer Tensor" $(\ldots)\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$

Grund für diesen Namen: $ds^2 = dx_n\, dx_n = \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} dq_i\, dq_j = g_{ij}\, dq_i\, dq_j$ (3)

Nachrechnen ! : $g^{\text{Cartesisch}}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, (4) $\quad g^{\text{Polar}}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \rho^2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ (5)

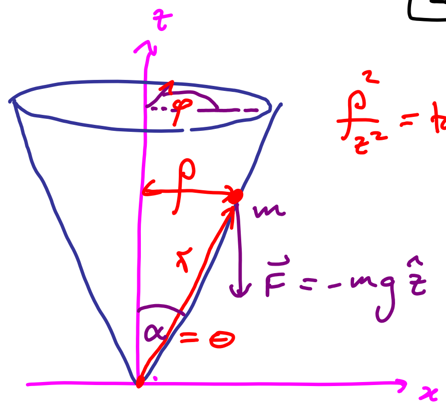
Beispiel: $\sum_{i,j} g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$
$= g_{11}\dot{q}_1\dot{q}_1 + g_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + g_{21}\dot{q}_2\dot{q}_1 + g_{22}\dot{q}_2\dot{q}_2$

$g^{\text{Kugel}}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$

z.B.: S34: $T(\dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$ (6)

Beispiel: Massenpunkt auf Kreiskegel

L43



$\frac{\rho^2}{z^2} = \tan^2\alpha$

Zwangsbedingung:

$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 \tan^2\alpha = 0$ (1)

Wahl v. q's: (Kugelkoordinaten) $q_1 = r, \quad q_2 = \varphi$ (2)

(r, θ, φ)
$\theta = \alpha =$ fest

(Alternativen (z, φ) oder (ρ, φ) wären auch OK)

$x = r \sin\alpha \cos\varphi = x(r, \varphi)$ (3)

$y = r \sin\alpha \sin\varphi = y(r, \varphi)$ (4)

$z = r \cos\alpha = z(r, \varphi)$ (5)

Bestimmung v. L: L44

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2} m \underbrace{g_{ij}^{\text{Kugel}}}\, \dot q_i \dot q_j = \frac{1}{2} m \left(\dot r^2 + r^2 \cancel{\dot\theta^2} + r^2 \sin^2\theta\, \dot\varphi^2 \right)$ (1)

$(\dot r \;\; \dot\theta \;\; \dot\varphi) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot r \\ \dot\theta \\ \dot\varphi \end{pmatrix}$ $= 0$, denn $\theta = \alpha = \text{fest}$ (2)

Potenzielle Energie: $U = mgz = mgr\cos\alpha$ (3)

$L = (r, \dot r, \cancel{\varphi}, \dot\varphi) = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2 \sin^2\alpha\, \dot\varphi^2 \right) - mgr\cos\alpha$ (4)

unabhängig v. φ! $\Rightarrow$ φ ist zyklisch $\Longrightarrow$ p_φ ist erhalten! (5)

$\rho = r\sin\alpha$

Erhaltener verallg. Impuls:

$$\boxed{p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} \overset{(4)}{=} \overbrace{m r^2 \sin^2\alpha\, \dot\varphi}^{m\rho(\rho\dot\varphi) = m\rho v_\varphi = L_z,\quad \rho\dot\varphi = v_\varphi} = \ell}$$ (6)

LGr: L45

$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$ (1)

$q_1 = r$: $0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial L}{\partial r}$ (2)

$= m\ddot r - \left(m r \sin^2\alpha\, \dot\varphi^2 - mg\cos\alpha \right)$ (3)

$q_2 = \varphi$: $0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi}$ (4)

$= \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{m r^2 \sin^2\alpha\, \dot\varphi}_{\ell} \Big]$ [Konsistent mit (44.6)] (5)

Energieerhaltung: $\frac{\partial L}{\partial t} \overset{(44.6)}{=} 0 \xrightarrow{\text{(siehe L54)}} \frac{d}{dt}\big(\overbrace{T + U}^{\text{Gesamtenergie}}\big) = 0$ (6)

$\text{const.} = E = T + U = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2 \sin^2\alpha\, \dot\varphi^2 \right) + mgr\cos\alpha$ (7)

Lösung der Bwgsgl.

L46

(44.6) löst (45.5): $\ell \overset{(44.6)}{=} m r^2 \sin^2\alpha \, \dot\varphi \xrightarrow[\text{nach } \dot\varphi]{\text{Aufgelöst}} \dot\varphi \overset{(44.6)}{=} \frac{\ell}{m r^2 \sin^2\alpha}$ (1)

(46.1) in (45.7):

$$E \overset{(45.7)}{=} \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2 \dot\varphi^2 \sin^2\alpha\right) + mgr\cos\alpha \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot r^2 + \underbrace{\left[\frac{\ell^2}{2 m r^2 \sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha\right]}_{=: U_{eff}(r)} \quad (3)$$

Effektives Potential: $U_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2 m r^2 \sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha$ (4)

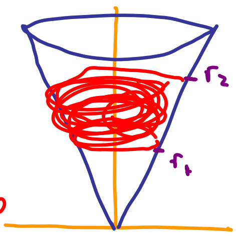
Zentrifugalbarriere bestraft kleine r:

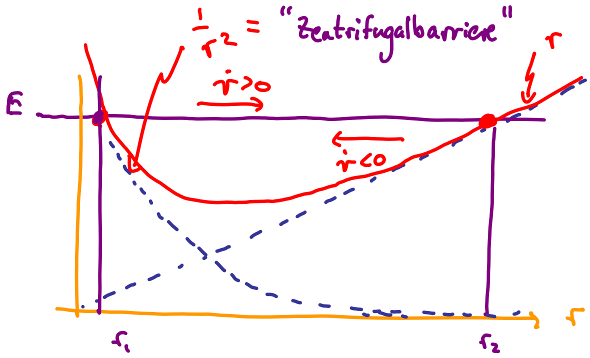
wenn $r \to 0$

mit $\ell \sim r^2 \dot\varphi$ = konst

dann $\dot\varphi \sim \frac{1}{r^2} \to \infty$

und $T = r^2 \dot\varphi^2 \sim \frac{r^2}{r^4} \to \infty$





$r = r(t)$?

L47

$$\frac{dr}{dt} = \dot r \overset{(46.2)}{=} \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{eff}(r)\right]} \quad (1)$$

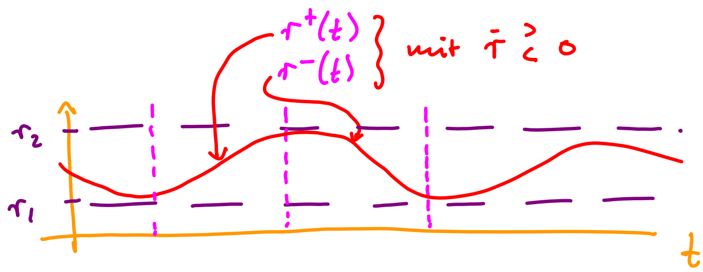
zwei Lösungen, im Folgenden durch "±" unterschieden.

Trennung der Variablen und Integrieren:

$$t - t_0 = \int_{t_0}^{t} dt' = \int_{r_0}^{r} dr' \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{eff}(r')\right]}} =: t^{\pm}(r) \quad (2)$$

im Prinzip bekannte Funktion v. t
(Integral analytisch oder numerisch lösen)

(3) Invertieren: $r = r^{\pm}(t)$ auch bekannt (3)



$\varphi(t) = ?$

$$\dot{\varphi} \overset{(46.1)}{=} \frac{l}{m r^2 \sin^2\alpha} = \frac{d\varphi}{dt} \tag{1}$$

$$\varphi(t) - \varphi_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi' = \int_{t_0}^{t} dt' \frac{l}{m\, r^2(t') \sin^2\alpha} = \text{bekannt} \tag{2}$$

(47.3) einsetzen

im Prinzip bekannte Funktion v. t
(Integral analytisch oder numerisch lösen)

Integrationskonstanten: festgelegt durch Anfangsbedingungen:

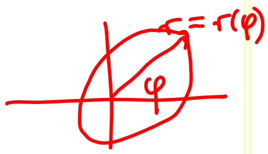
$$r(t_0) = r_0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \dot{r}(t_0) = v_{r_0}, \quad \dot{\varphi}(t_0) = \omega_0 \tag{3}$$

$$\dot{r}(t_0) \overset{(47.1)}{=} \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{eff}(r_0)\right]}, \qquad \dot{\varphi}(t_0) \overset{(46.1)}{=} \frac{l}{m r_0^2 \sin^2\alpha} \tag{4}$$

oder alternativ: l, E, r_0, φ_0

Jeder Erhaltungssatz legt eine Integrationskonstante fest!

Bahn: $r = r(\varphi)$?



Bereits bekannt (zumindest im Prinzip):

$$r = r(t) = r(t(\varphi)) \qquad \varphi \overset{(48.2)}{=} \varphi(t) \iff t = t(\varphi) \tag{1}$$

Eliminiere t:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{dt}{d\varphi}\right) = \frac{dr/dt}{d\varphi/dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} \tag{2}$$

(47.1) (48.1)

$$= \left[\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r)\right)}\; \frac{1}{l}\, m r^2 \sin^2\alpha\right] \tag{3}$$

Integriere:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi' = \int_{r_0}^{r} dr' \frac{1}{\left[\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r')\right)}\; \frac{1}{l}\, m r'^2 \sin^2\alpha\right]} = \text{bekannt} \tag{4}$$

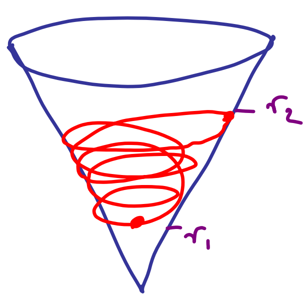
im Prinzip bekannte Funktion v. r
(Integral analytisch oder numerisch lösen)

$\Rightarrow \varphi = \varphi(r) = \text{bekannt}, \quad \Rightarrow r = r(\varphi) = \text{bekannt.}$

Wann ist Bahn geschlossen?

Falls $\varphi(\tau + t_0) = \varphi(t_0)$

$r(\tau + t_0) = r(t_0)$, etc.



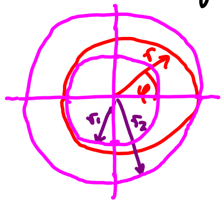
L50

Dauer von

$r_2 \to r_1 \to r_2 : \tau$

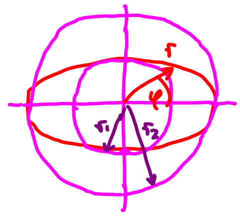
Hängt von α, ℓ, E, etc. ab.

Falls Bewegung periodisch ist: was ist Periode?



Periode:

$$\tau = 2\int_{t_1}^{t_2} dt' \overset{(47.2)}{=} 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r')\right)}} \qquad (1)$$



$$\tau = 4\int_{t_1}^{t_2} dt' = 4\int_{r_1}^{r_2} dr' \ldots$$

Erhaltungssätze und Symmetrien

L51a

1. Satz:

L sei invariant unter Raumtranslation, $\vec{r}_\nu \to \vec{r}_\nu + \varepsilon\vec{\eta} \quad \forall \nu$ (1)

Dann ist der Gesamtimpuls erhalten, $\frac{d}{dt}\left(\sum_\nu \vec{p}_\nu\right) = 0$ (2)

2. Satz:

L sei invariant unter Raumrotationen, $\vec{r}_\nu \to \vec{r}_\nu + (\vec{n} \times \vec{r}_\nu)\varepsilon \quad \forall \nu$ (3)

Dann ist der Gesamtdrehimpuls erhalten, $\frac{d}{dt}\left(\sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{p}_\nu\right) = 0$ (4)

3. Satz:

L sei invariant unter Zeitverschiebungen, $t \to t + \varepsilon$ (5)

Dann ist die Hamiltonfunktion erhalten, $\frac{d}{dt} H = \frac{d}{dt}\left(\sum_\nu \vec{p}_\nu \cdot \dot{\vec{r}}_\nu - L\right) = 0$ (6)

(Gesamtenergie)

1. Satz: Raumtranslationsinvariant

$\boxed{L51b}$

Raumtranslationen: (Raumverschiebungen)

$$\vec r_\nu \to \vec r_\nu' = \vec r_\nu + \varepsilon\vec\eta \qquad \forall\, \nu = 1,\dots,N \qquad (1a)$$

$$\dot{\vec r}_\nu \to \dot{\vec r}_\nu' \overset{(1a)}{=} \dot{\vec r}_\nu \qquad (1b)$$

gleiche Verschiebung $\forall\,\nu$.

Annahme: L sei invariant unter (1):

$$\cancel{L}(\vec r_\nu, \dot{\vec r}_\nu, t) = L(\vec r_\nu', \dot{\vec r}_\nu', t) \qquad (2)$$

$$\overset{(1)}{=} L(\vec r_\nu + \varepsilon\vec\eta, \dot{\vec r}_\nu, t) \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} L(\vec r+\varepsilon\vec\eta) \\ \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L(\vec r) + \underbrace{\varepsilon\vec\eta\cdot\frac{\partial L}{\partial\vec r}}_{\sum_{i=1}^{3}\varepsilon\eta_i\frac{\partial L}{\partial r_i}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \xrightarrow[\text{Taylor-Ent.}]{\varepsilon\to 0} \cancel{L}(\vec r_\nu, \dot{\vec r}_\nu, t) + \varepsilon\vec\eta\cdot\left(\sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial\vec r_\nu}\right)_{\in\mathbb{R}^3} \qquad (4)$$

(3) gilt $\forall\,\vec\eta \Rightarrow$

$\vec\eta\cdot\vec y = 0 \ \forall\,\vec\eta \Rightarrow \vec y = 0$

$$0 \overset{(4)}{=} \sum_{\nu=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial\vec r_\nu} \overset{(Lg2)}{=} \sum_{\nu=1}^{N}\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec r}_\nu}\right)}_{\overset{(39.1)}{=:}\,\vec p_\nu} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{\nu=1}^{N}\vec p_\nu\right] \qquad (5)$$

□

Gesamtimpuls ist erhalten

$\vec r_\nu = \vec R + \delta\vec r_\nu \Rightarrow L = (\cancel{\vec R}, \delta\vec r_\nu)$

$\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\vec r}} = \frac{1}{2}m\dot{\vec r}^2 = m\dot{\vec r} = \vec p\right)$

Schwerpunktskoordinate ist hier die zyklische Koordinate:

$$\vec R = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\vec r_\nu \xrightarrow{(1a)} \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\vec r_\nu + \varepsilon\vec\eta) = \vec R + \varepsilon\vec\eta \qquad (6)$$

2. Satz: Rotationsinvariant

(Änderung $\perp$ zu $\vec r \Rightarrow$ Rotation) $\boxed{L52}$

Rotationen:

$$\vec r_\nu \to \vec r_\nu' = \vec r_\nu + \varepsilon(\vec n\times\vec r_\nu) \qquad (\varepsilon \text{ infinitesimal}) \qquad (1a)$$

$$\dot{\vec r}_\nu \to \dot{\vec r}_\nu' \overset{(1b)}{=} \dot{\vec r}_\nu + \varepsilon(\vec n\times\dot{\vec r}_\nu) \qquad (1b)$$

Annahme: L sei invariant unter (1):

$$\cancel{L}(\vec r_\nu, \dot{\vec r}_\nu, t) = L(\vec r', \dot{\vec r}', t) \qquad (2)$$

$$= L(\vec r_\nu + (\vec n\times\vec r_\nu)\varepsilon,\ \dot{\vec r}_\nu + (\vec n\times\dot{\vec r}_\nu)\varepsilon,\ t) \qquad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} L(\vec r+\varepsilon\vec n\times\vec r) \\ \xrightarrow{\varepsilon\to 0} L(\vec r) + \varepsilon(\vec n\times\vec r)\cdot\frac{\partial L}{\partial\vec r} \\ = L(\vec r) + \varepsilon\vec n\cdot\left(\vec r\times\frac{\partial L}{\partial\vec r}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \xrightarrow[\text{Taylor-Ent.}]{\varepsilon\to 0} \cancel{L}(\vec r_\nu, \dot{\vec r}_\nu, t) + \varepsilon\vec\eta\cdot\sum_{\nu=1}^{N}\left[\left(\vec r_\nu\times\underbrace{\frac{\partial L}{\partial\vec r_\nu}}_{\overset{(Lg2)}{=}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec r}_\nu}\right) = \dot{\vec p}_\nu}\right) + \left(\dot{\vec r}_\nu\times\underbrace{\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec r}_\nu}}_{\overset{(39.1)}{=}\vec p_\nu}\right)\right] \qquad (4)$$

zyklische invariant Spatprodukt.

(3) gilt $\forall\,\vec\eta \Rightarrow$

$\vec\eta\cdot\vec y = 0 \ \forall\,\vec\eta$

$\Rightarrow \vec y = 0$

Produktregel rückwärts

$$0 \overset{(4)}{=} \sum_{\nu=1}^{N}\left[\vec r_\nu\times\dot{\vec p}_\nu + \dot{\vec r}_\nu\times\vec p_\nu\right] = \frac{d}{dt}\left[\sum_{\nu=1}^{N}\vec r_\nu\times\vec p_\nu\right] \qquad (5)$$

Gesamtdrehimpuls ist erhalten! □

3. Satz: Zeit translationsinvariant

Zeittranslationen: (Zeitverschiebungen)

$$t \to t' = t + \varepsilon \,, \quad \vec{r} \to \vec{r}\,' = \vec{r} \qquad (1a)$$

$$\dot{\vec{r}} \to \dot{\vec{r}}\,' \overset{(1)}{=} \dot{\vec{r}} \qquad \left(\text{denn } \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'}\right) \qquad (1b)$$

Annahme: L sei invariant unter (1):

$$\cancel{L}(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t) = L(\vec{r}_\nu\,', \dot{\vec{r}}_\nu\,', t') = L(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t+\varepsilon) \qquad (2)$$

$$\xrightarrow[\text{Taylor-Ent.}]{\varepsilon \to 0} \cancel{L}(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t) + \varepsilon \frac{\partial L}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \qquad (4)$$

Betrachte nun totale Zeitableitung:

$$\frac{d}{dt} L(\vec{r}_\nu, \dot{\vec{r}}_\nu, t) = \sum_{\nu=1}^{N} \Bigg[\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_\nu}\right)}_{\overset{(Lg2)}{=} \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}\right)}_{\vec{p}_\nu}} \overbrace{\frac{d\vec{r}_\nu}{dt}}^{\dot{\vec{r}}_\nu} + \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}\right)}_{\vec{p}_\nu \; (39.1)} \overbrace{\frac{d\dot{\vec{r}}_\nu}{dt}}^{\ddot{\vec{r}}_\nu} \Bigg] + \overset{(4)}{\cancel{\frac{\partial L}{\partial t}}} = 0 \qquad (5)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \left[\dot{\vec{p}}_\nu \cdot \dot{\vec{r}}_\nu + \vec{p} \cdot \ddot{\vec{r}}_\nu \right] = \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{N} \vec{p}_\nu \cdot \dot{\vec{r}}_\nu \qquad (6)$$

(5)−(6) = 0:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \Big[\underbrace{\sum_{\nu=1}^{N} \vec{p}_\nu \cdot \dot{\vec{r}}_\nu - L}_{(8) =: H} \Big] = 0} \qquad (7)$$

"Hamilton-Funktion" ist erhalten

Def. d. Hamilton-Funktion:

$$H = \sum_\nu \vec{p}_\nu \cdot \dot{\vec{r}}_\nu - L \qquad (1)$$

Für $\vec{p}_\nu = m\dot{\vec{r}}_\nu$ (bisher übliche Fall, insbesondere für Cartesische K)

$$H \overset{(1)}{=} \sum_\nu m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu \cdot \dot{\vec{r}}_\nu - \left(\sum_\nu \tfrac{1}{2} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2} - U \right) \qquad (2)$$

$$= \sum_\nu \tfrac{1}{2} m_\nu \dot{\vec{r}}_\nu^{\,2} + U \qquad (3)$$

$$= T + U = E = \text{Energie} \qquad (4)$$

Interpretation: Hamilton-Funktion = Energie!

Energie-Erhaltungssatz:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \overset{(53.7)}{\Rightarrow} \frac{d}{dt} H = 0} \qquad (5)$$

Gilt entlang der 3N-Trajektorie, die durch Lg2 festgelegt wird.