Krummlinige Koordinaten   V11   19.05.08

[es gibt keine Seiten L37-L41, wegen Nummerierungsfehler]   L42

Für 1 Teilchen: $$x_n = x_n(q) \qquad (1)$$

z.B. Polar: (ρ, φ, z)

Kugel: (r, θ, φ)

Dann: $$T = \tfrac{1}{2} m \dot{x}_n \dot{x}_n = \tfrac{1}{2} m \underbrace{\frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_j}}_{\equiv\, g_{ij}} \dot{q}_i \dot{q}_j = \tfrac{1}{2} m\, g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \qquad (2)$$

"metrischer Tensor"

Grund für diesen Namen:

(Einsteinsche Summen-Konvention) $$ds^2 = dx_n\, dx_n = \frac{\partial x_n}{\partial q_i} \frac{\partial x_n}{\partial q_j} dq_i\, dq_j = g_{ij}\, dq_i\, dq_j \qquad (3)$$

Nachrechnen!:

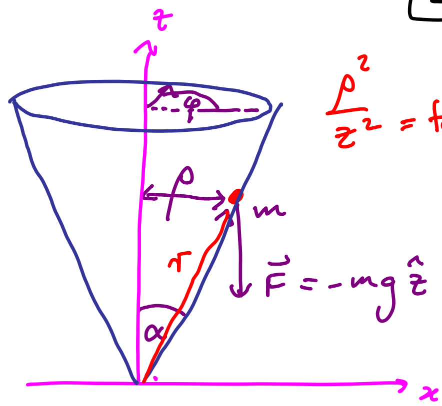
$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

$$g_{ij}^{\text{Cartesisch}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \qquad (4) \qquad g_{ij}^{\text{Polar}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \rho^2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

$$g_{ij}^{\text{Kugel}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Beispiel: Massenpunkt auf Kreiskegel

L43



$$\frac{\rho^2}{z^2} = \tan^2\alpha$$

Zwangsbedingung:

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 \tan^2\alpha = 0 \qquad (1)$$

Wahl v. q's: (Kugelkoordinaten)

(r, θ, φ)

$\theta = \alpha =$ fest

$$(r, \varphi) \qquad (2)$$

(Alternativen (z, φ) oder (ρ, φ) wären auch OK)

$$x = r \sin\alpha \cos\varphi = x(r, \varphi) \qquad (3)$$

$$y = r \sin\alpha \sin\varphi = y(r, \varphi) \qquad (4)$$

$$z = r \cos\alpha = z(r, \varphi) \qquad (5)$$

L44

Bestimmung v. L:

Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2} m \underbrace{g^{\text{Kugel}}_{ij}}_{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}} \dot q_i \dot q_j = \frac{1}{2} m \left(\dot r^2 + \cancel{r^2 \dot\theta^2} + r^2 \sin^2\theta\, \dot\varphi^2\right) \quad (1)$$

$= 0$, denn $\rightarrow \theta = \alpha = \text{fest}$ (2)

Potenzielle Energie:

$$U = mgz = mgr\cos\alpha \quad (3)$$

$$L = (r, \dot r, \cancel{\varphi}, \dot\varphi) = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2 \sin^2\alpha\, \dot\varphi^2\right) - mgr\cos\alpha \quad (4)$$

unabhängig v. φ! $\Rightarrow$ φ ist zyklisch! (5)

$\rho = r\sin\alpha$

$m\rho\underbrace{\rho\dot\varphi}_{v_\varphi} = m\rho v_\varphi = L_z$

Erhaltener verallg. Impuls:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} \overset{(4)}{=} m r^2 \sin^2\alpha\, \dot\varphi \equiv \ell} \quad (6)$$

L45

Lgl:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (1)$$

$q = r$:

$$0 = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot r}}_{m\dot r}\Big) - \frac{\partial L}{\partial r} \quad (2)$$

$$= m\ddot r - \left(m r \sin^2\alpha\, \dot\varphi^2 - mg\cos\alpha\right) \quad (3)$$

$q = \varphi$:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} \quad (4)$$

$$= \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{m r^2 \sin^2\alpha\, \dot\varphi}_{\ell}\Big) = 0 \qquad \text{[Konsistent mit (44.6)]} \quad (5)$$

Energieerhaltung:

$$\frac{\partial L}{\partial t} \overset{(44.6)}{=} 0 \;\xRightarrow{\text{(siehe L54)}}\; \frac{d}{dt}\Big(\overbrace{T + U}^{\text{Gesamtenergie}}\Big) = 0 \quad (6)$$

$$\text{const.} = E = T + U = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2 \dot\varphi^2 \sin^2\alpha\right) + mgr\cos\alpha \quad (7)$$

Lösung der Bwgsgl.

(44.6) löst (45.5): $\ell \overset{(44.6)}{=} m r^2 \sin^2\alpha\, \dot\varphi \quad \xrightarrow[\text{nach } \dot\varphi]{\text{Aufgelöst}} \quad \dot\varphi \overset{(44.6)}{=} \dfrac{\ell}{m r^2 \sin^2\alpha}$ (1)

(46.1) in (45.7): $E \overset{(45.7)}{=} \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2 \dot\varphi^2 \sin^2\alpha\right) + mgr\cos\alpha$ (2)

$$= \frac{1}{2} m \dot r^2 + \underbrace{\left[\frac{\ell^2}{2m r^2 \sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha\right]}_{=:\, U_{eff}(r)} \quad (3)$$

Effektives Potential: $U_{eff}(r) = \dfrac{\ell^2}{2m r^2 \sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha$ (4)

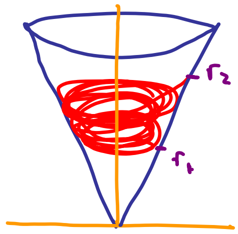
Zentrifugalbarriere bestraft kleine r:

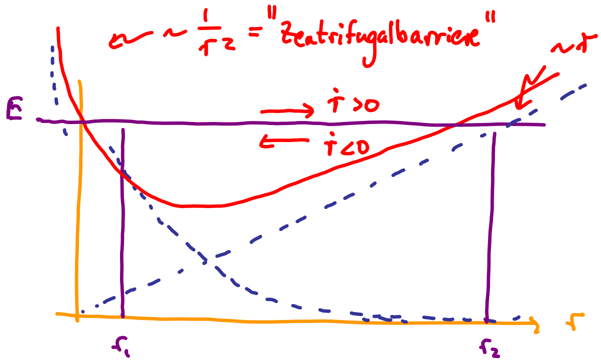
wenn $r \to 0$

mit $\ell \sim r^2 \dot\varphi = \text{konst}$

dann $\dot\varphi \sim \frac{1}{r^2} \to \infty$

und $T \sim r^2 \dot\varphi^2 \sim \frac{1}{r^2} \to \infty$





$r = r(t)$?

$\dot r \overset{(46.2)}{=} \pm \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{eff}(r)\right]}$ (1)

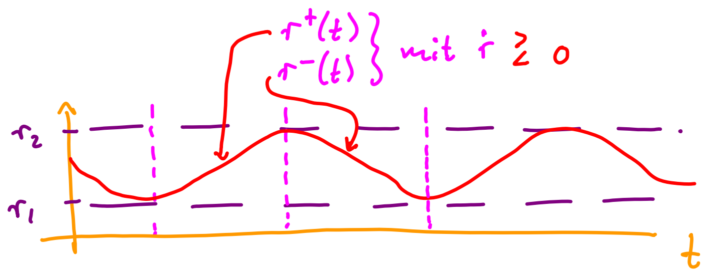
zwei Lösungen, im Folgenden durch "±" unterschieden.

Trennung der Variablen und Integrieren:

$$t - t_0 = \int_{t_0}^{t} dt' = \int_{r_0}^{r} dr' \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{eff}(r')\right]}} =: t^{\pm}(r) \quad (2)$$

im Prinzip bekannte Funktion v. t
(Integral analytisch oder numerisch lösen)

(3) Invertieren: $r = r^{(\pm)}(t)$ auch bekannt (3)



$\varphi(t) = ?$

$$\dot{\varphi} \overset{(46.1)}{=} \frac{\ell}{m r^2 \sin^2\alpha} = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1)$$

$$\varphi(t) - \varphi_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi(t)} d\varphi' = \int_{t_0}^{t} dt' \frac{\ell}{m\, r^2(t')\sin^2\alpha} = \text{bekannt} \quad (2)$$

(47.4) einsetzen

im Prinzip bekannte Funktion v. t
(Integral analytisch oder numerisch lösen)

Integrationskonstanten: festgelegt durch Anfangsbedingungen:

$$r(t_0) = r_0, \quad \varphi(t_0) = \varphi_0, \quad \dot{r}(t_0) = v_{r0}, \quad \dot{\varphi}(t) \overset{(46.1)}{=} \omega_0 \quad (3)$$

$$v_{r0} \overset{(47.1)}{=} \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_{eff}(r_0)\right]}, \qquad \omega_0 \overset{(46.1)}{=} \frac{\ell}{m r_0^2 \sin^2\alpha} \quad (4)$$

oder alternativ: ℓ, E, r_0, φ_0

Jeder Erhaltungssatz legt eine Integrationskonstante fest!

Bahn: $r = r(\varphi)$?

Bereits bekannt (zumindest im Prinzip):

$$r = r(t) = r(t(\varphi)) \qquad \varphi = \varphi(t) \Leftrightarrow t = t(\varphi) \quad (1)$$

Eliminiere t:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{dt}{d\varphi}\right) = \frac{dr/dt}{d\varphi/dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} \quad (2)$$

(47.1) (48.1)

$$= \left[\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r)\right)}\ \frac{1}{\ell} m r^2 \sin^2\alpha\right] \quad (3)$$

Integriere:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi(r)} d\varphi' = \int_{r_0}^{r} dr' \frac{1}{\left[\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r')\right)}\ \frac{1}{\ell} m r'^2 \sin^2\alpha\right]} = \text{bekannt} \quad (4)$$

im Prinzip bekannte Funktion v. r
(Integral analytisch oder numerisch lösen)

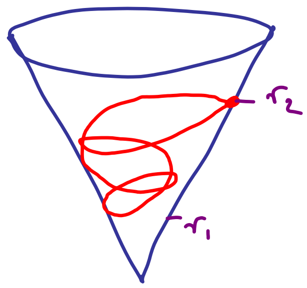
$$\Rightarrow \quad \varphi = \varphi(r) = \text{bekannt}, \quad \Rightarrow \quad r = r(\varphi) \text{ bekannt}$$

L50

Wann ist Bahn geschlossen?

Falls $\varphi(T+t_0) = \varphi(t_0)$

$r(T+t_0) = r(t_0)$, etc.



Dauer von

$r_2 \to r_1 \to r_2 : T$

Hängt von α, ℓ, E, etc. ab.

Falls Bewegung periodisch ist: was ist Periode?

Periode:
$$\boxed{T = 2\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{eff}(r')\right)}}} \qquad (1)$$

L51a

Erhaltungssätze und Symmetrien

1. Satz:

L sei invariant unter Raumtranslation, $\quad \vec{r}_\nu \to \vec{r}_\nu + \varepsilon\vec{\eta} \quad \forall \; \nu$ (1)

Dann ist der Gesamtimpuls erhalten, $\quad \frac{d}{dt}\left(\sum_\nu \vec{p}_\nu\right) = 0$ (2)

2. Satz:

L sei invariant unter Raumrotationen, $\quad \vec{r}_\nu \to \vec{r}_\nu + (\vec{n} \times \vec{r}_\nu)\varepsilon \quad \forall \; \nu$ (3)

Dann ist der Gesamtdrehimpuls erhalten, $\quad \frac{d}{dt}\left(\sum_\nu \vec{r}_\nu \times \vec{p}_\nu\right) = 0$ (4)

3. Satz:

L sei invariant unter Zeitverschiebungen, $\quad t \to t + \varepsilon$ (5)

Dann ist die Hamiltonfunktion erhalten, $\quad \frac{d}{dt} H = \frac{d}{dt}\left(\sum_\nu \vec{p}_\nu \cdot \dot{\vec{r}}_\nu - L\right) = 0$ (6)

(Gesamtenergie)

1. Satz : Raumtranslationsinvariant

$\boxed{L51b}$

Raumtranslationen: $\vec r_\nu \to \vec r_\nu{}' = \vec r_\nu + \varepsilon\vec\eta \quad \forall\ \nu = 1,\dots,N$ (1a)

(Raumverschiebungen) $\dot{\vec r}_\nu \to \dot{\vec r}_\nu{}' \overset{(1a)}{=} \dot{\vec r}_\nu$ (1b)

gleiche Verschiebung $\forall\ \nu$.

Annahme: L sei

$\boxed{\text{invariant}}$ unter (1): $\cancel{L}(\vec r_\nu, \dot{\vec r}_\nu, t) = L(\vec r_\nu{}', \dot{\vec r}_\nu{}', t)$ (2)

$$\overset{(1)}{=} L(\vec r_\nu + \varepsilon\vec\eta, \dot{\vec r}_\nu, t) \quad (3)$$

$L(\vec r + \varepsilon\vec\eta)$
$\xrightarrow{\varepsilon\to 0} L(\vec r) + \varepsilon\vec\eta\cdot\frac{\partial L}{\partial\vec r}$ $\Big\} \Rightarrow$ $\underset{\text{Taylor-Ent.}}{\xrightarrow{\varepsilon\to 0}} \cancel{L}(\vec r_\nu, \dot{\vec r}_\nu, t) + \varepsilon\vec\eta\cdot\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial L}{\partial\vec r_\nu}$ (4)

(3) gilt $\forall\ \vec\eta \Rightarrow$

$\vec\eta\cdot\vec y = 0\ \forall\ \vec\eta \Rightarrow \vec y = 0$

$$0 \overset{(4)}{=} \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial L}{\partial\vec r_\nu} \overset{(Lg2)}{=} \sum_{\nu=1}^N \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec r}_\nu}}_{=:\ \vec p_\nu\ (39.1)}\Big) = \frac{d}{dt}\Big[\sum_{\nu=1}^N p_\nu\Big] \quad (5)$$

Gesamtimpuls ist erhalten □

Schwerpunktskoordinate ist hier die zyklische Koordinate:

$$\vec R = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^N m_\nu r_\nu \xrightarrow{(1a)} \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^N m_\nu(\vec r_\nu + \varepsilon\vec\eta) = \vec R + \varepsilon\vec\eta \quad (6)$$

2. Satz : Rotationsinvariant

(Änderung $\perp$ zu $\vec r \Rightarrow$ Rotation) $\boxed{L52}$

Rotationen: $\vec r_\nu \to \vec r_\nu{}' = \vec r_\nu + \varepsilon(\vec n\times\vec r_\nu)$ (1a)

$\dot{\vec r}_\nu \to \dot{\vec r}_\nu{}' \overset{(1b)}{=} \dot{\vec r}_\nu + \varepsilon(\vec n\times\dot{\vec r}_\nu)$ (1b)

Annahme: L sei

$\boxed{\text{invariant}}$ unter (1): $\cancel{L}(\vec r_\nu, \dot{\vec r}_\nu, t) = L(\vec r_\nu{}', \dot{\vec r}_\nu{}', t)$ (2)

$$= L(\vec r_\nu + (\vec n\times\vec r_\nu)\varepsilon, \dot{\vec r}_\nu + (\vec n\times\dot{\vec r}_\nu)\varepsilon, t) \quad (3)$$

$L(\vec r + \varepsilon\vec\eta\times\vec r)$
$\xrightarrow{\varepsilon\to 0} L(\vec r) + \varepsilon(\vec\eta\times\vec r)\cdot\frac{\partial L}{\partial\vec r}$
$= L(\vec r) + \varepsilon\vec\eta\cdot\left(\vec r\times\frac{\partial L}{\partial\vec r}\right)$ $\Big\} \Rightarrow$ $\underset{\text{Taylor-Ent.}}{\xrightarrow{\varepsilon\to 0}} L(\vec r_\nu, \dot{\vec r}_\nu, t) + \varepsilon\vec\eta\cdot\sum_{\nu=1}^N\Big[\Big(\vec r_\nu\times\underbrace{\frac{\partial L}{\partial\vec r_\nu}}_{\overset{(Lg2)}{=}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec r}_\nu}\right) = \dot{\vec p}_\nu}\Big) + \Big(\dot{\vec r}_\nu\times\underbrace{\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec r}_\nu}}_{\vec p_\nu\ (39.1)}\Big)\Big]$ (4)

(3) gilt $\forall\ \vec\eta \Rightarrow$

$\vec\eta\cdot\vec y = 0\ \forall\ \vec\eta \Rightarrow \vec y = 0$

Produktregel rückwärts

$$0 \overset{(4)}{=} \sum_{\nu=1}^N\Big[\vec r_\nu\times\dot{\vec p}_\nu + \dot{\vec r}_\nu\times\vec p_\nu\Big] = \frac{d}{dt}\Big[\sum_{\nu=1}^N \vec r_\nu\times\vec p_\nu\Big] \quad (5)$$

Gesamtdrehimpuls ist erhalten ! □

L53

3. Satz: Raumtranslationsinvariant

Zeittranslationen: (Zeitverschiebungen)

$$t \to t' = t + \varepsilon \;, \quad \vec r \to \vec r\,' = \vec r \qquad (1a)$$

$$\dot{\vec r} \to \dot{\vec r}\,' \overset{(1)}{=} \dot{\vec r} \qquad \left(\text{denn } \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'}\right) \qquad (1b)$$

Annahme: L sei invariant unter (1):

$$\cancel{L}(\vec r_\nu, \dot{\vec r}_\nu, t) = L(\vec r_\nu\,', \dot{\vec r}_\nu\,', t') = L(\vec r_\nu, \dot{\vec r}_\nu, t + \varepsilon) \qquad (2)$$

$$\xrightarrow[\text{Taylor-Ent.}]{\varepsilon \to 0} \cancel{L}(\vec r_\nu, \dot{\vec r}_\nu, t) + \varepsilon \frac{\partial L}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \,. \qquad (4)$$

Betrachte nun totale Zeitableitung:

$$\frac{d}{dt} L(\vec r_\nu, \dot{\vec r}_\nu, t) = \sum_{\nu=1}^{N} \left[\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \vec r_\nu}\right)}_{\overset{(LG2)}{=} \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}_\nu}}_{\vec p_\nu \leftarrow (39.1)}\right)} \cdot \frac{d\vec r}{dt} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}_\nu}}_{\vec p_\nu} \cdot \frac{d\dot{\vec r}}{dt} \right] + \overset{(4)}{\cancel{\frac{\partial L}{\partial t}}} = 0 \qquad (5)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} \left[\dot{\vec p}_\nu \cdot \dot{\vec r}_\nu + \vec p \cdot \ddot{\vec r}_\nu \right] = \frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^{N} \vec p_\nu \cdot \dot{\vec r}_\nu \qquad (6)$$

(5) − (6) = 0:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \Big[\underbrace{\sum_{\nu=1}^{N} \vec p \cdot \dot{\vec r}_\nu - L}_{(8)\;=:\;H} \Big] = 0} \qquad (7)$$

$=: H =$ "Hamilton-Funktion" ist erhalten

L54

Def. d. Hamilton-Funktion:

$$H = \sum_\nu \vec p_\nu \cdot \dot{\vec r}_\nu - L \qquad (1)$$

Für $\vec p_\nu = m \dot{\vec r}_\nu$ (bisher übliche Fall)

$$H \overset{(1)}{=} \sum_\nu m_\nu \dot{\vec r}_\nu^{\,2} - \left(\sum_\nu \tfrac{1}{2} m_\nu \dot{\vec r}_\nu^{\,2} - U \right) \qquad (2)$$

$$= \sum_\nu \tfrac{1}{2} m_\nu \dot{\vec r}_\nu^{\,2} + U \qquad (3)$$

$$= T + U = E = \text{Energie} \qquad (4)$$

Interpretation: Hamilton-Funktion = Energie!

Energie-Erhaltungssatz:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \overset{(53.7)}{\Rightarrow} \frac{d}{dt} H = 0} \qquad (5)$$

Gilt entlang der 3N-Trajektorie, die durch LG2 festgelegt wird.