

Zentralpotential

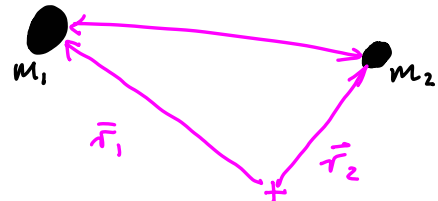
V12

20.05.08

ZP1

Zweikörperproblem

$$L_{\text{tot}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) =$$



(1)

Symmetrie

1. Translation
2. Zeit transl.
3. Rotationsinv.

Erhaltungsgröße

- Schwerpunkts impuls
Energie
Drehimpuls

Vereinfachung

- Einteilchenproblem
Dgl. 1. Ordnung
Radialgl.

Schwerpunktskoordinate:

$$\vec{R} =$$

(1)

Relativkoordinate:

$$\vec{r} =$$

(2)

(1), (2) in (1.1):

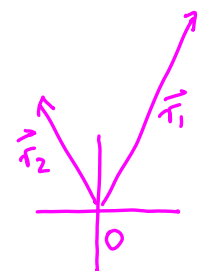
$$L_{\text{tot}} =$$

siehe (ZP2a.6)

(3)

$$M =$$

$$\mu =$$



"reduzierte Masse" (4)

Sehr nützliche Vereinfachung: Dynamik von $\vec{R}$ und $\vec{r}$ entkoppelt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}}$$

$$\vec{R}^{(3)} = \text{zyklisch} \Rightarrow$$

$$\vec{P} = M \dot{\vec{R}} = \text{Schwerpunktimpuls ist erhalten}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_{\text{sp}} t \quad (5)$$

Zwischenrechnung : Transformation zu Schwerpunkt und Relativkoordinaten

2P2a

Transformation : $\vec{R} = \frac{1}{M}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$ (1a), $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (1b)

Rücktransformation : $\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r}$ (2a), $\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r}$ (2b)

$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}}$ (3a) $\dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}}$ (3b)

Kinetische Energie : $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2$ (4)

$$= \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2$$
 (5)

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} m_1 m_2 \cancel{2 \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} (1 - 1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{M^2} (m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2) \dot{\vec{r}}^2$$
 (6)

$$= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\vec{r}}^2$$
 (7)

□

Relativkoordinate:

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \stackrel{(2.4)}{=} \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - U(r)$$

(1) 2P3

$L(\vec{r})$ beschreibt ein effektives Einteilchenproblem für $\vec{r}$

Wähle
Zylinderkoordinaten
als verallg. Koord.:

$$\vec{r} :=$$

(2)

$$L = L(\rho, \varphi, z; \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}) =$$

(3)

(LG2):

$$q_1 = \rho :$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \frac{\partial L}{\partial \rho} \Rightarrow$$
 (4)

$$q_2 = \varphi :$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Rightarrow$$
 (5)

Drehimpuls-
erhaltung!

$$q_3 = z :$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z} \Rightarrow$$
 (6)

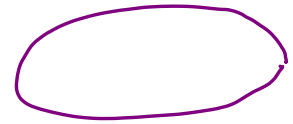
Reduktion zur Radialgleichung

ZP 4

Triviale Lösung v. (3.6):

(1)

$\Rightarrow$ Bewegung nur in Ebene



Offensichtliche
Lösung v. (3.5):

$$\mu \rho^2 \dot{\varphi}$$

erhaltener Drehimpuls (2)

(1), (2) entspricht der Wahl: $\hat{z}$ -Achse Drehimpulsvektor.

Drehimpulsvektor: $\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} =$ (3)

Radial-Gleichung: (3.4)

$$\mu \ddot{\rho} = \mu \rho \dot{\varphi}^2 - \partial_{\rho} U$$

(1) ZPS

$$L \stackrel{(4.2)}{=} \mu \rho^2 \dot{\varphi} \quad (3)$$

(4.2)

(2)

"Zentrifugalkraft" (favorisiert große ρ)

Energieerhaltung:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \stackrel{(2.53.7)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right) = \quad (4)$$

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho)$$

$E =$

$$- \left[\frac{\mu}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho) \right] \quad (5)$$

$$= \frac{\mu}{2} [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2] + U(\rho) \quad (6)$$

Erhaltene Energie:

$$E \stackrel{(5.6)}{=} \quad (1)$$

ZP6

(1) ist DGL
1. Ordnung für $\rho(t)$

"Effektives Potential
für Radialbewegung"

Effektive Radialkraft:

$$-\partial_{\rho} U_{\text{eff}} = \quad (2)$$

Wir kennen nun
im Prinzip:

$$\bar{R} = \bar{R}_0 + \bar{U}_{sp} t, \quad \begin{array}{lll} \rho(t) & \text{aus} & (6.1) \\ \varphi(t) & \text{aus} & (4.2) \\ z(t) & \text{aus} & (4.1) \end{array} \quad \begin{array}{l} \dot{\varphi} = \frac{L}{\mu \rho^2} \\ z(t) = 0 \end{array} \quad (3)$$

Zahl der Integrations-
Konstanten:

Allgemein erwartet:

Wir haben hier:

Lösung v. 3 DGL 2. Ord
für je $\bar{r}_1(t)$ und $\bar{r}_2(t)$
erfordert 12 Int.-Konst:
 $\bar{r}_1(0), \dot{\bar{r}}_1(0), \bar{r}_2(0), \dot{\bar{r}}_2(0)$

(4)

Lösung v. Radial-Gl:

$$(6.1): \quad E = \frac{\mu}{2} \dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}}(\rho) \quad (1)$$

ZP7

$$\frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho} = \quad (8.1) \quad (2)$$

Separation d. Variablen:
Integriere:

$$dt = \frac{d\rho}{\pm \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U_{\text{eff}}(\rho)]}} = \text{Funktion von } \rho \quad (3)$$

$\rho(t):$

$$\Rightarrow t \quad \text{bekannt}, \quad (4)$$

$$\text{diese Relation invertieren} \Rightarrow \rho \quad \text{bekannt!} \quad (5)$$

$\varphi(t):$

$$\rho(t) \text{ eingesetzt in } \dot{\varphi} \stackrel{(4.2)}{=} \frac{L}{\mu \rho^2} \Rightarrow \dot{\varphi} \quad \text{bekannt!} \quad (6)$$

$$\text{Integrieren, } \Rightarrow \varphi \quad \text{bekannt!} \quad (7)$$

Bahnkurve: $p = p(t)$

(ohne Zeitabhängigkeit anzugeben)

ZP8

Analog zu (L49.1):

$$\frac{d\varphi}{dp} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dp} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{p}} \quad (1)$$

Separation d. Variablen:

Integration:

$$dp = \frac{dp (l/\mu p^2)}{\pm \left[\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(p)) \right]^{1/2}} \quad (2)$$

= Funktion v.

$$\varphi \quad \text{bekannt} \quad (3)$$

$$\text{Diese Relation invertieren} \Rightarrow p \quad \text{bekannt.} \quad (4)$$

Qualitative Diskussion der Bewegung (WICHTIG!)

ZP9

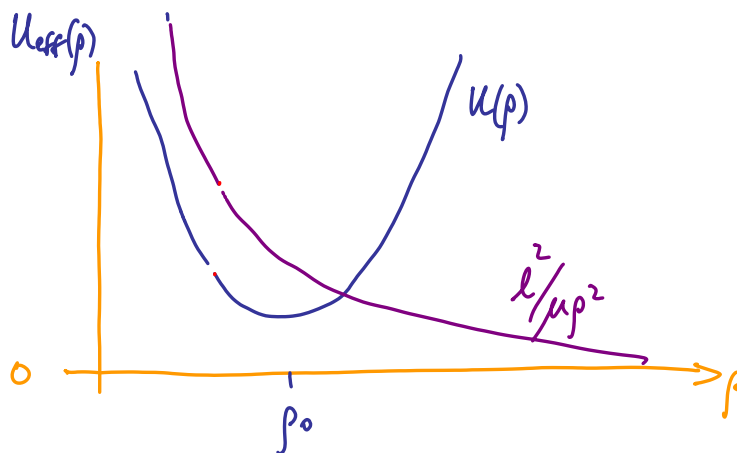
Typischer Fall 1:

z.B. für

$$U(p) = \alpha (p - p_0)^2$$

Harmonische Osz. mit
Gleichgewichtsabstand p_0

(z.B. Vib. eines
2-atomigen Moleküls)



$$\text{für } \left\{ \begin{array}{l} p \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0 \end{array} \right\} U_{\text{eff}}(p) \rightarrow$$

{ nur "gebundene"
Bewegung
möglich } \quad (1)

Umkehrpunkte bei

(2)

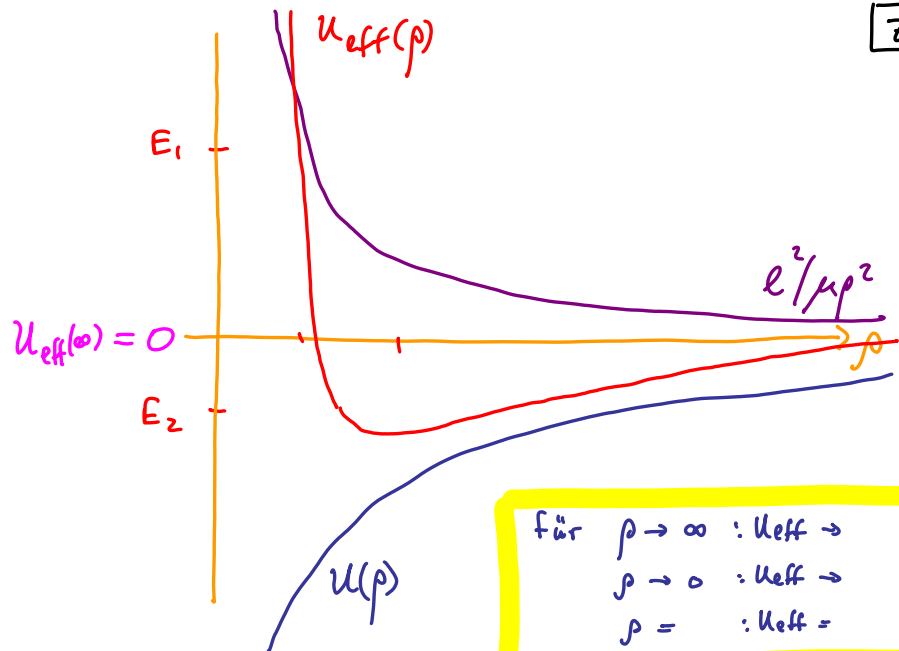
Typischer Fall 2:

ZP1c

z.B. für

$$U(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho}$$

Gravitations- oder
Coulomb-Potential



2 Arten von Bewegung
sind möglich:

(i) E_1 $U_{\text{eff}}(\infty) :$

(ii) E_2 $U_{\text{eff}}(\infty) :$

ungebundene Bewegung
"Streuung durch
Zentrifugalbarriere"

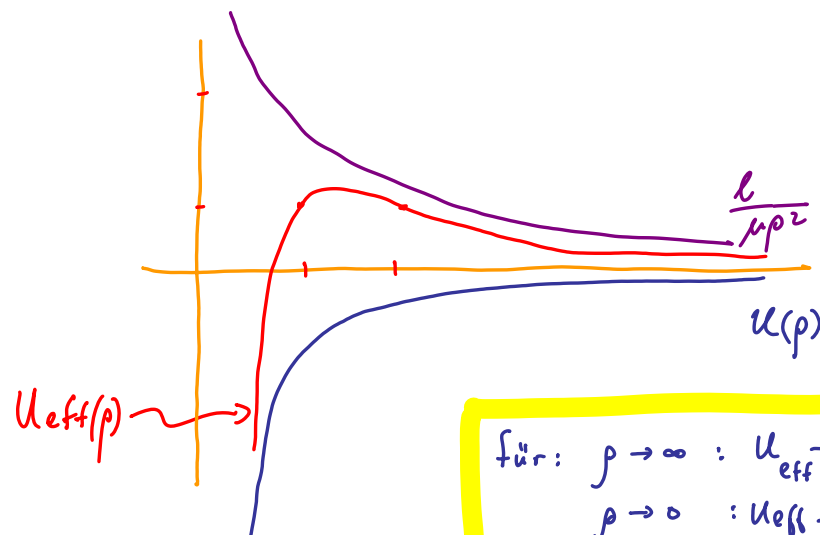
gebundene Bewegung

Typischer Fall 3:

ZP11

z.B. für

$$U(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho^3}$$



3 Arten v. Bewegung
sind möglich:

(i)

Streuung : (immer) Umkehrpunkt

(ii)

Gebundene Bewegung :

(iii)

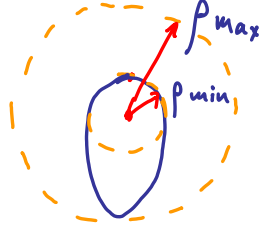
Fall ins Zentrum (läuft durch's Zentrum hindurch)

Gebundene Bwg: ist Bahn geschlossen oder nicht?

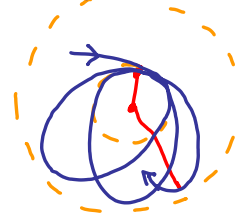
ZP 12

$\Delta\varphi$ sei
Winkeländerung
zwischen
 $\rho =$

geschlossen:



ungeschlossen:



Bedingung für
geschlossene Bwg:

Bahn schließt nach n Schleifen:

(1)

$$\varphi - \varphi_0 \stackrel{(8.2)}{=} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho' (l/\mu\rho'^2)}{\left[\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(\rho')) \right]^{1/2}}$$

(2)

hängt v. U ab!

Nachrechnen:

$$\Delta\varphi = \left\{ \begin{array}{l} \text{für } U = \\ \text{für } U = \end{array} \right.$$

für $U =$ $\stackrel{(2)}{\Rightarrow} n =$ $\Rightarrow$ Bahn ist Ellipse
für $U =$ $\Rightarrow n =$ $\Rightarrow$ Bahn schließt nach 2 Schleifen

(3)

Keplerproblem (Fließbach, Kap. 17)

ZP 13

Gravitations-
oder Coulomb-Pot:

$$U(r) = - \frac{\alpha}{r} \quad \text{z.B.: } \alpha = \begin{cases} G m_1 m_2 & \text{Grav. Pot} \\ -q_1 q_2 & \text{Coulomb-Pot} \end{cases}$$

(1)

Effektives Pot:

$$U_{\text{eff}}(\rho) \stackrel{(7.1)}{=}$$

(2)

Für diese Form ist Bahnkurve lösbar!

(8.2):

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho' (l/\mu\rho'^2)}{\left\{ \frac{2}{\mu} \left(E - \left[-\frac{\alpha}{\rho} + \frac{l^2}{2\mu\rho^2} \right] \right) \right\}^{1/2}}$$

(3)

$$\varphi - \varphi_0 \stackrel{\text{Broustein}}{=} \arccos \left\{ \frac{l/\rho - \mu\alpha/l}{\left[2\mu E + \mu^2 \alpha^2 / l^2 \right]^{1/2}} \right\} + \text{konst.}$$

(4)

durch Wahl v. φ_0

Definition:

Parameter: $p = \frac{l^2}{\mu \alpha}$,

ZP 14

(1)

Exzentrizität: $\varepsilon = \left[1 + \frac{2E l^2}{\mu \alpha^2} \right]^{1/2}$

(2)

$\cos \left[(13.4) \right]:$

$\cos \varphi \stackrel{(14.4)}{=} \frac{l/p - \mu \alpha / l}{\left[2\mu E + \frac{\mu^2 l^2}{l^2} \right]^{1/2}}$

(3)

$\cos \varphi =$

(4)

$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} [1 + \varepsilon \cos \varphi]$

(5)

Bahkurve:

(durch clevere Ausnutzung von E- und l-Erhaltung!)

$\rho(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$

(6)

(14.6) beschreibt Kegelschnitte:

$\rho(\varphi) \stackrel{(14.6)}{=} \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$

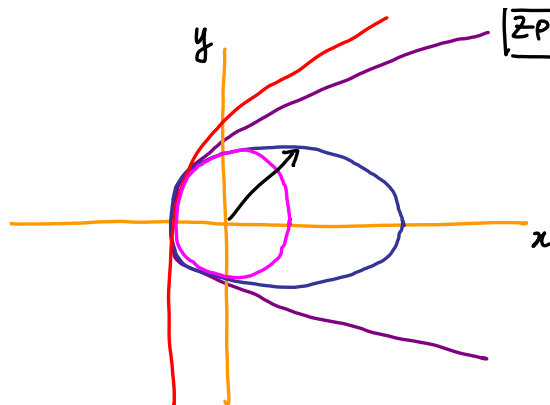
$\varepsilon \stackrel{(14.2)}{=} \left[1 + \frac{2E l^2}{\mu \alpha^2} \right]^{1/2}$

(i) $E > 0 \Rightarrow \Rightarrow$

(ii) $E = 0 \Rightarrow \Rightarrow$

(iii) $E < 0 \Rightarrow \Rightarrow$

(iv) $E = -\frac{\mu \alpha^2}{2l^2} \Rightarrow \Rightarrow$



ZP 15

(1)

$\varepsilon \cos \varphi \rightarrow \text{möglich} \Rightarrow \text{möglich}$

$\begin{cases} \rho_{\max} = \\ \rho_{\min} = \\ \Delta \varphi = \end{cases}$ (vergleiche 12.3)

(2)

$\rho =$, unabhängig von φ ! (3)

Bahngleichung:

Wir zeigen nun, dass (1) eine Ellipse beschreibt:

$$\begin{aligned} &= \frac{P}{1-\varepsilon^2} \quad (7) \\ &\left. \begin{array}{l} \text{große} \\ \text{kleine} \end{array} \right\} \text{Halbachse} \\ &= \frac{P}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \quad (8) \\ &\stackrel{(7)}{=} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\rho \stackrel{(14.6)}{=} \frac{P}{1+\varepsilon \cos \varphi} \quad (1)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\rho} \quad (2)$$

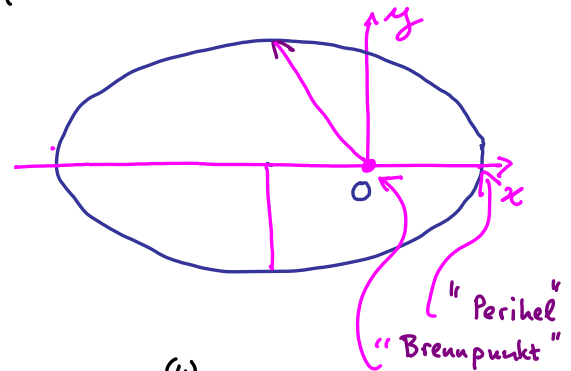
$$\stackrel{(1)}{P} = \rho + \varepsilon \rho \cos \varphi \quad (3)$$

$$(P - \varepsilon x) \stackrel{(3)}{=} \rho \stackrel{(2)}{=} \quad (4)$$

$$P^2 \stackrel{(4)}{=} x^2 (1 - \varepsilon^2) + 2 \varepsilon x P + y^2 \quad (5)$$

$$= (1 - \varepsilon^2) \left[x + \varepsilon \frac{P}{1 - \varepsilon^2} \right]^2 - \varepsilon^2 \frac{P^2}{1 - \varepsilon^2} + y^2 \quad (6)$$

$$(9) + \varepsilon^2 b^2 : \quad P^2 + \varepsilon^2 b^2 = (1 - \varepsilon^2) \left[x + \varepsilon a \right]^2 + y^2 \quad (10)$$



(16.10) = Ellipse:

$$\frac{(x + \varepsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Check Skizze:

$$x = 0: \quad y^2 = (1 - \varepsilon^2) b^2 \stackrel{(16.7)}{=} P^2 \quad \checkmark \Rightarrow y = \pm P \quad (2)$$

$$x = -\varepsilon a: \quad y^2 = b^2 \quad \checkmark \Rightarrow y = \pm b \quad [b = \text{kleine Halbachse}] \quad (3)$$

$$y = 0: \quad x^2 + 2 \varepsilon a x + a^2 (\varepsilon^2 - 1) = 0 \quad (4)$$

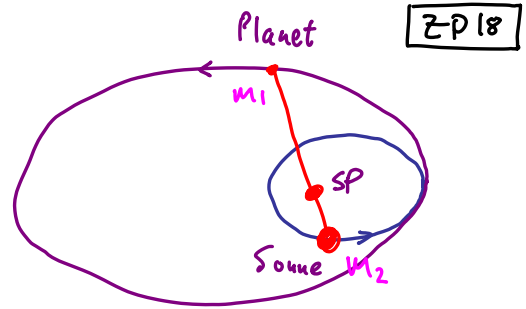
$$x = -\varepsilon a \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 \varepsilon^2 a^2 - 4 a^2 (\varepsilon^2 - 1)} \quad (5)$$

$$= -\varepsilon a \pm a = a \left\{ \begin{array}{l} 1 - \varepsilon \\ -1 - \varepsilon \end{array} \right\} \quad \checkmark \quad (6)$$

$\uparrow [a = \text{gro\ss e Halbachse}]$

Keplersche Gesetze:

1. Planetenbahnen sind Ellipsenbahnen mit Sonne in einem Brennpunkt.



Herleitung:

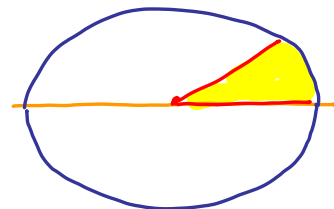
$$\vec{r}_{\text{Sonne}} := \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \quad (1)$$

$$\vec{r}_{\text{Planet}} := \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad (2)$$

$\Rightarrow \vec{r}_{\text{Sonne}}, \vec{r}_{\text{Planet}}$ beschreiben Ellipsen;

Schwerpunkt liegt in einem Brennpunkt.

2. Die vom Fahrstrahl pro Zeit überstrichene Fläche dF ist konstant



Fläche des Dreiecks

$$\Delta F =$$

Herleitung:

(1)

3. Quadrat der Umlaufzeit ist proportional zur dritten Potenz der großen Halbachse.

Herleitung:
Fläche der Ellipse:

$$\pi ab = F = \quad (2)$$

$$b^2 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 =$$

$$T = 2\pi a \cdot b \mu / \ell \quad (3)$$

$$\frac{\mu}{a} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{g_{m_1 m_2}} =$$

(4)

= etwa gleich für alle Planeten.