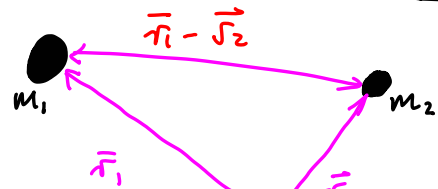


Zweikörperproblem

$$L_{\text{tot}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) =$$

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (1)$$

$\vec{r}$

SymmetrieErhaltungsgrößeVereinfachung

- | | | |
|------------------|--------------------|--------------------|
| 1. Translation | Schwerpunktsimpuls | Einteilchenproblem |
| 2. Zeit transl. | Energie | Dgl. 1. Ordnung |
| 3. Rotationsinv. | Drehimpuls | Radialgl. |

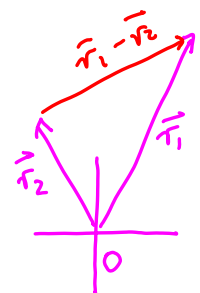
Schwerpunktskoordinate: $\vec{R} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \quad (1)$

Relativkoordinate: $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad r = |\vec{r}| \quad (2)$

(1), (2) in (1.1); $L_{\text{tot}} = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2}_{L_M(\dot{\vec{R}})} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(r)}_{L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})} \quad (3)$

siehe ZP2a.6

$$M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$



"reduzierte Masse" (4)

Sehr nützliche Vereinfachung: Dynamik von R und r entkoppelt

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = 0 \\ \frac{d}{dt} (M \dot{\vec{R}}) &= 0 \end{aligned} \right\} \vec{R} = \text{zyklisch} \Rightarrow \vec{P} = M \dot{\vec{R}} = \text{Schwerpunktsimpuls ist erhalten}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_{\text{sp}} t \quad (5)$$

Zwischenrechnung : Transformation zu Schwerpunkt und Relativkoordinaten

2P2a

Transformation : $\vec{R} = \frac{1}{M}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$ (1a), $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (1b)

Rücktransformation : $\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r}$ (2a), $\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r}$ (2b)

$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}}$ (3a), $\dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}}$ (3b)

Kinetische Energie : $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2$ (4)

$$= \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2$$
 (5)

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} m_1 m_2 \cancel{2 \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} (1 - 1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{M^2} (m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2) \dot{\vec{r}}^2$$
 (6)

$$= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\vec{r}}^2$$
 (7) □.

Relativkoordinate:

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \stackrel{(2.4)}{=} \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - U(r)$$

(1) 2P3

$L(\vec{r})$ beschreibt ein effektives Einteilchenproblem für $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$

Wähle
Zylinderkoordinaten
als verallg. Koord.:

$$\vec{r} := (\rho, \varphi, z) = (q_1, q_2, q_3), \quad r^2 = \rho^2 + z^2$$
 (2)

$$L = L(\rho, \varphi, z; \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \frac{1}{2} \mu (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\sqrt{\rho^2 + z^2})$$
 (3) (42.5)

(LG2):

$$q_1 = \rho:$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \frac{\partial L}{\partial \rho} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\underbrace{\mu \dot{\rho}}_{\mu \dot{\rho}}) = \mu \rho \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial \rho}$$
 (4)

$$q_2 = \varphi:$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\underbrace{\mu \rho^2 \dot{\varphi}}_L) = 0$$
 (5) Drehimpuls-
erhaltung!

$$q_3 = z:$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z} \Rightarrow \mu \ddot{z} = - \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} U'(\sqrt{\rho^2 + z^2})$$
 (6)

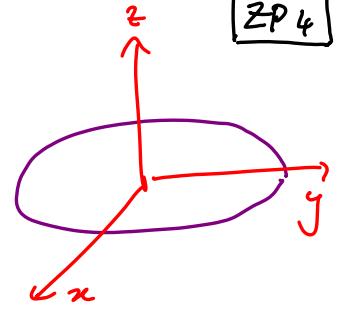
Reduktion zur Radialgleichung

ZP 4

Triviale Lösung v. (3.6): **Ansatz:** $z(t) = 0 \quad \forall t$

(1)

$\Rightarrow$ Bewegung nur in $x-y$ Ebene



Offensichtliche

Lösung v. (3.5):

$$\mu \rho^2 \dot{\varphi} = l = \text{konst} = |\text{erhaltener Drehimpuls}| \quad (2)$$

(1), (2) entspricht der Wahl: $\hat{z}$ -Achse $\parallel$ Drehimpulsvektor.

Drehimpulsvektor: $\vec{l} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = l \hat{z} \quad (3)$

Radial-Gleichung: (3.4)

$$\mu \ddot{\rho} = \mu \rho \dot{\varphi}^2 - \partial_{\rho} u(\rho)$$

(1) ZPS

$$\begin{aligned} l^2 &= (\mu \rho^2 \dot{\varphi})^2 \\ \dot{\varphi}^2 &= \frac{l^2}{\mu^2 \rho^4} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\stackrel{(4.2)}{=} \frac{l^2}{\mu \rho^3} - \partial_{\rho} u \quad (2)$$

"Zentripetalkraft" (favorisiert große ρ)

weil $L = L(\rho, \dot{\rho}, \dot{\varphi})$

Energieerhaltung:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad (L53.7) \Rightarrow$$

$E = H = \text{erhalten}$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right) = 0 \quad (\text{Satz 3, v.11}) \quad (4)$$

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - u(\rho)$$

$$E = \mu (\dot{\rho} \dot{\rho} + \rho^2 \dot{\varphi} \dot{\varphi} + \dot{z} \dot{z}) - \left[\frac{\mu}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - u(\rho) \right] \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu}{2} [\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2] + u(\rho) \\ &= T + u \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\stackrel{(4.1)}{=} 0 \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{l^2}{\mu^2 \rho^4} \end{aligned} \quad (6)$$

Erhaltene Energie: $E \stackrel{(5.6)}{=} \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{\rho}^2}_{T_\rho} + \underbrace{\frac{l^2}{2\mu\rho^2} + U(\rho)}_{U_{\text{eff}}(\rho)} + U(\rho)$ (1) ZP6

(1) ist DGL
1. Ordnung für $\rho(t)$

$U_{\text{eff}}(\rho) = \left\{ \begin{array}{l} \text{"Effektives Potential"} \\ \text{für Radialbewegung"} \end{array} \right.$

Effektive Radialkraft: $-\partial_\rho U_{\text{eff}} = \frac{l^2}{\mu\rho^3} - \partial_\rho U \stackrel{(5.2)}{=} \text{rechts} \checkmark$ (2)

Man könnte nun ansetzen: $\mu \ddot{\rho} = -\partial_\rho U_{\text{eff}}$ konsistent

Liste konsistent mit (5.1)

Wir kennen nun
im Prinzip:

$\bar{R} = \bar{R}_0 + \bar{v}_{\text{Sp}} t$, $\rho(t)$ aus (6.1)

$\varphi(t)$ aus (4.2) $\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu\rho^2}$

$z(t)$ aus (4.1) $z(t) = 0$ (3)

Zahl der Integrations-
Konstanten:

Allgemein erwartet:

Lösung v. 3 DGL 2. Ord
für je $\vec{r}_1(t)$ und $\vec{r}_2(t)$
erfordert 12 Int.-Konst.
 $\vec{r}_1(0), \dot{\vec{r}}_1(0), \vec{r}_2(0), \dot{\vec{r}}_2(0)$
 $3 + 3 + 3 + 3 = 12$

Wir haben hier:

$\bar{R}_0, \bar{v}_{\text{Sp}} : 3 + 3$

$l, E : 2$

$z(0), \dot{z}(0) : 2$

$\rho(0), \varphi(0) : 2$

12 $\checkmark$ (4)

Lösung v. Radial-Gl:

(6.1): $E = \frac{\mu}{2} \dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}}(\rho)$ (1) ZP7

$\frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho} = \pm \left[\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(\rho)) \right]^{1/2}$ (8.1) (2)

Separation d. Variablen:
Integriere:

$t - t_0 = \int_{t_0}^t dt' = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\pm \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U_{\text{eff}}(\rho')]}} = \text{Funktion von } \rho$ (3)

$\rho(t): \Rightarrow t = t^\pm(\rho)$ bekannt, (4)

diese Relation invertieren $\Rightarrow \rho = \rho(t)$ bekannt! (5)

$\varphi(t):$ $\rho(t)$ eingesetzt in $\dot{\varphi} \stackrel{(4.2)}{=} \frac{l}{\mu\rho^2} \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t)$ bekannt! (6)

aus (5)

Integrieren, $\Rightarrow \varphi = \varphi(t)$ bekannt! (7)

Bahnkurve: $\rho = \rho(\varphi)$ (ohne Zeitabhängigkeit anzugeben)

2-P8

Analog zu (L49.1):

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{d\rho} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} = \left(\frac{l}{\mu \rho^2} \right)^{4.2} \frac{1}{\pm \left[\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(\rho)) \right]^{7.2}} \quad (1)$$

Separation d. Variablen:

Integration:

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \int_{\rho_0}^{\varphi} d\varphi' = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho' (l/\mu \rho'^2)}{\pm \left[\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(\rho')) \right]^{1/2}} \quad (2) \\ &= \text{Funktion v. } \rho \end{aligned}$$

$$\varphi = \varphi(\rho) \quad \text{bekannt} \quad (3)$$

$$\text{Diese Relation invertieren} \Rightarrow \rho = \rho(\varphi) \quad \text{bekannt.} \quad (4)$$

Qualitative Diskussion der Bewegung (WICHTIG!)

2-P9

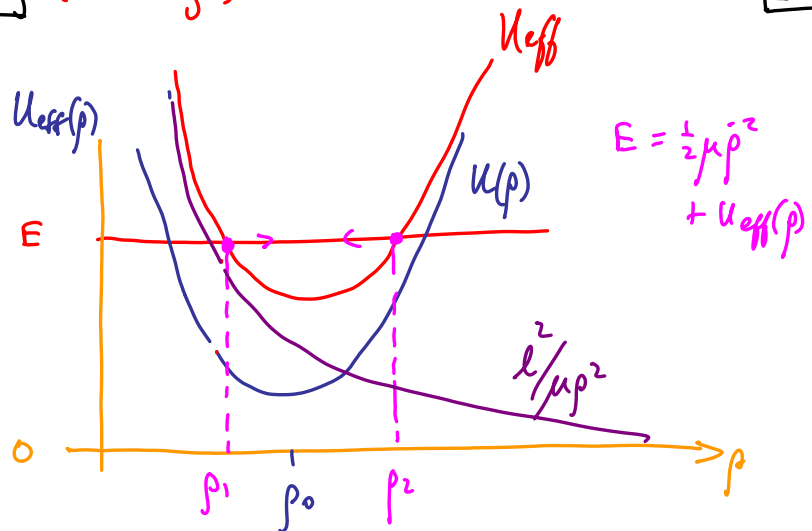
Typischer Fall 1:

z.B. für

$$U(\rho) = \alpha (\rho - \rho_0)^2$$

Harmonische Osz. mit
Gleichgewichtsabstand ρ_0

(z.B. Vib. eines
2-atomigen Moleküls)



$$\text{für } \left\{ \begin{array}{l} \rho \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow 0 \end{array} \right\} U_{\text{eff}}(\rho) \rightarrow \infty$$

nur "gebundene"
Bewegung
möglich (1)

$$\rho_1, \rho_2 \text{ Umkehrpunkte bei } U_{\text{eff}}(\rho_1) = E = U_{\text{eff}}(\rho_2) \quad (2)$$

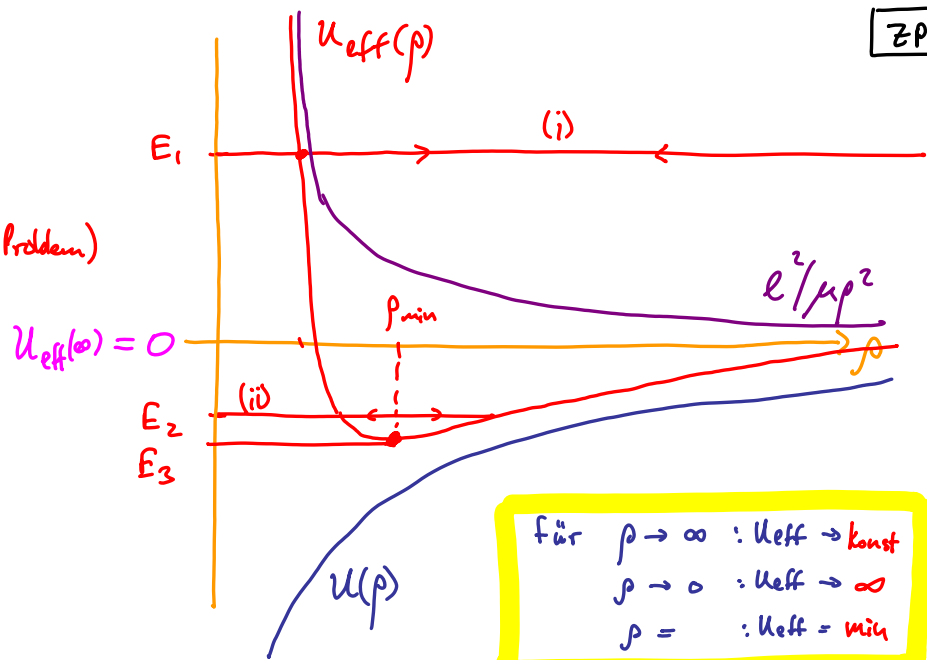
Typischer Fall 2:

ZP1c

z.B. für

$$U(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho} \quad (\text{Kepler-Problem})$$

Gravitations- oder
Coulomb-Potential



2 Arten von Bewegung
sind möglich:

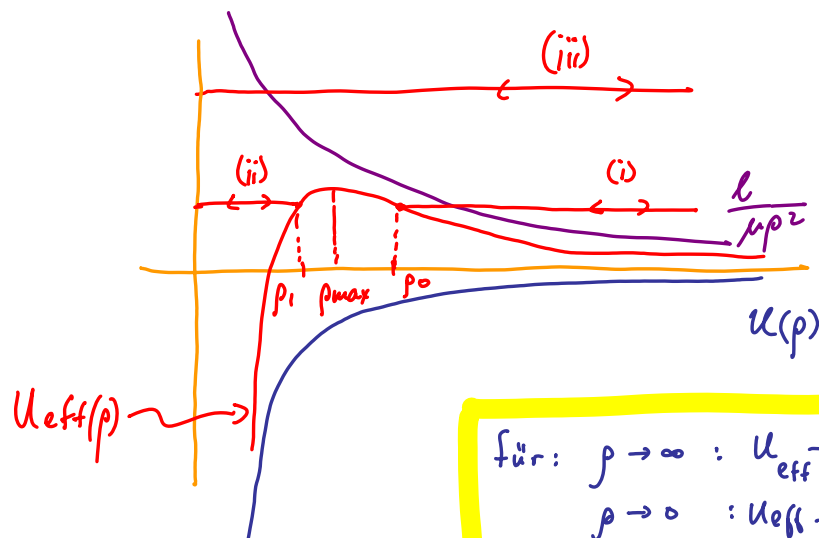
- hier = 0 gewählt.
- (i) $E_1 > U_{\text{eff}}(\infty)$: (Hyperbel, Parabel) } ungebundene Bewegung
"Streuung durch Zentrifugalbarriere"
 - (ii) $U_{\text{min}} < E_2 < U_{\text{eff}}(\infty)$: (ellipsen) }
 - (iii) $U_{\text{min}} = E_3$: Kreisbahn } gebundene Bewegung

Typischer Fall 3:

ZP11

z.B. für

$$U(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho^3}$$



3 Arten v. Bewegung
sind möglich:

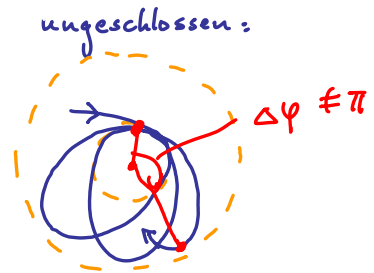
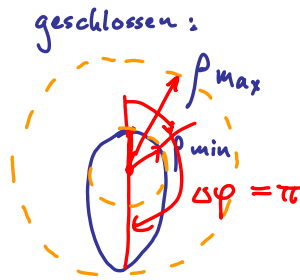
- (i) Streuung: $\rho > \rho_0$ (immer) Umkehrpunkt
 $\uparrow E = U_{\text{eff}}(\rho_0)$
- (ii) Gebundene Bewegung: $0 \leq \rho \leq \rho_1$
- (iii) Fall ins Zentrum (läuft durch's Zentrum hindurch)

Gebundene Bwg: ist Bahn geschlossen oder nicht?

hängt von $U(\rho)$ ab!

ZP 12

$\Delta\varphi$ sei
Winkeländerung
zwischen
 $\rho = \rho_{\min}, \rho_{\max}$



Bedingung für
geschlossene Bahn:

Bahn schließt nach n Schleifen: $n \cdot 2\Delta\varphi = 2\pi m$

(1)

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 \stackrel{(8.2)}{=} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{d\rho' (l/\mu\rho'^2)}{\left[\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(\rho')) \right]^{1/2}} \stackrel{(1)}{=} \frac{\pi m}{n} ??$$

hängt v. U ab!

(2)

Nachrechnen:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} \pi & \text{für } U = -\frac{\alpha}{\rho} \Rightarrow n=1 \Rightarrow \text{Bahn ist Ellipse} \\ \pi/2 & \text{für } U = \alpha\rho^2 \Rightarrow n=2 \Rightarrow \text{Bahn schließt nach 2 Schleifen} \end{cases}$$

(3)

Keplerproblem (Fließbach, Kap. 17)

ZP 13

Gravitations-
oder Coulomb-Pot:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad \text{z.B.: } \alpha = \begin{cases} G m_1 m_2 & \text{grav. Pot} \\ -q_1 q_2 & \text{Coulomb-Pot} \end{cases}$$

(1)

Effektives Pot:

$$U_{\text{eff}}(\rho) \stackrel{(7.1)}{=} -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{l^2}{2\mu\rho^2}$$

(2)

Für diese Form ist Bahnkurve lösbar!

$$(8.2): \quad \varphi - \varphi_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho' (l/\mu\rho'^2)}{\left\{ \frac{2}{\mu} \left(\mu E - \left[-\frac{\mu\alpha}{\rho'} + \frac{l^2}{2\mu\rho'^2} \right] \right) \right\}^{1/2}}$$

(3)

$$\varphi - \varphi_0 = \arcsin \left\{ \frac{l/\rho - \mu\alpha/l}{[2\mu E + \mu^2 \alpha^2 / l^2]^{1/2}} \right\} + \text{konst.}$$

(4)

durch Wahl v. φ_0

Definition:

Parameter: $p = \frac{l^2}{\mu \alpha}$,

ZP 14

(1)

Exzentrizität: $\varepsilon = \left[1 + \frac{2E l^2}{\mu \alpha^2} \right]^{1/2}$

(2)

$\frac{1}{l} \frac{\mu \alpha}{l} \cos \varphi \stackrel{(13.4)}{=} \frac{\frac{1}{p} \cos \varphi}{\frac{l^2}{\mu \alpha^2}} \stackrel{(14.4)}{=} \frac{\frac{l}{p} - \frac{\mu \alpha}{l^2}}{\left[\frac{2 \mu E l^2}{\mu^2 \alpha^2} + \frac{\mu^2 l^2}{l^2 \mu^2 \alpha^2} \right]^{1/2}} = \varepsilon$

(3)

p, p

$\frac{1}{p} \cos \varphi = \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p} \right] \frac{1}{\varepsilon}$

(4)

$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} [1 + \varepsilon \cos \varphi]$

(5)

Bahkurve:

(durch clevere Ausnutzung von E- und l-Erhaltung!)

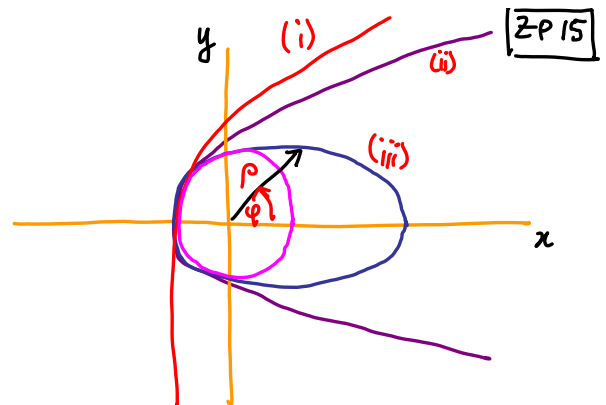
$$p(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

(6)

(14.6) beschreibt Kegelschnitte:

$p(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$

$\varepsilon = \left[1 + \frac{2E l^2}{\mu \alpha^2} \right]^{1/2}$



(1)

(i) $E > 0 \Rightarrow \varepsilon > 1 \Rightarrow \text{Hyperbel}$ } $\varepsilon \cos \varphi \rightarrow -1 \text{ möglich} \Rightarrow p \rightarrow \infty \text{ möglich}$

(ii) $E = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1 \Rightarrow \text{Parabel}$

(iii) $E < 0 \Rightarrow \varepsilon < 1 \Rightarrow \text{Ellipse}$

$$\begin{cases} p_{\max} = \frac{p}{1 - \varepsilon} \\ p_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon} \\ \Delta \varphi = \pi \end{cases} \quad (\text{vergleiche 12.3})$$

(2)

(iv) $E = -\frac{\mu \alpha^2}{2l^2} \Rightarrow \varepsilon = 0 \Rightarrow \text{Kreis}$

$p = p$, unabhängig von φ ! (3)

Bahngleichung:

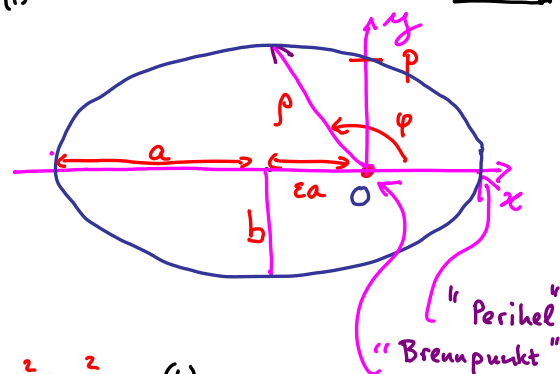
$$\rho \stackrel{(14.6)}{=} \frac{P}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (1)$$

ZP 16

Wir zeigen nun, dass (1) eine Ellipse beschreibt:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\rho} \quad (2)$$

(2)



$$\rho = \rho + \varepsilon \rho \cos \varphi \quad (3)$$

(3)

$$(P - \varepsilon x)^2 \stackrel{(3)}{=} \rho^2 \stackrel{(2)}{=} x^2 + y^2 \quad (4)$$

$$P^2 \stackrel{(4)}{=} x^2 (1 - \varepsilon^2) + 2 \varepsilon x P + y^2 \quad (5)$$

$$= (1 - \varepsilon^2) \left[x + \varepsilon \frac{a}{1 - \varepsilon^2} \right]^2 - \varepsilon^2 \frac{P^2}{1 - \varepsilon^2} + y^2 \quad (6)$$

$$\frac{1}{b^2} \left[(9) + \varepsilon^2 b^2 \right] : \quad \frac{P^2}{b^2} + \varepsilon^2 \cancel{b^2} = \frac{1}{b^2} (1 - \varepsilon^2) \left[x + \varepsilon a \right]^2 + \frac{y^2}{b^2} \quad (10)$$

$\underbrace{\frac{1}{b^2} + \varepsilon^2}_{(8) = 1} \quad \left(\frac{1}{Pa} \quad \frac{P}{a} \right) = \frac{1}{a^2}$

(16.10) = Ellipse:

$$\frac{(x + \varepsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

(1)

ZP 17

Check Skizze:

$$x = 0: \quad y^2 = (1 - \varepsilon^2) b^2 \stackrel{(16.7)}{=} P^2 \quad \checkmark \Rightarrow y = \pm P \quad (2)$$

$$x = -\varepsilon a: \quad y^2 = b^2 \quad \checkmark \Rightarrow y = \pm b \quad [b = \text{kleine Halbachse}] \quad (3)$$

$$y = 0: \quad x^2 + 2 \varepsilon a x + a^2 (\varepsilon^2 - 1) = 0 \quad (4)$$

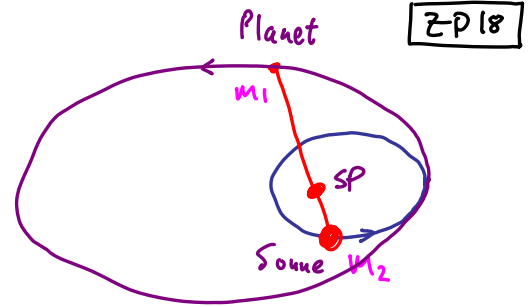
$$x = -\varepsilon a \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 \varepsilon^2 a^2 - 4 a^2 (\varepsilon^2 - 1)} \quad (5)$$

$$= -\varepsilon a \pm a = a \begin{Bmatrix} 1 - \varepsilon \\ -1 - \varepsilon \end{Bmatrix} \quad \checkmark \quad (6)$$

$\uparrow [a = \text{gro\ss e Halbachse}]$

Kepplersche Gesetze:

1. Planetenbahnen sind Ellipsenbahnen mit Sonne in einem Brennpunkt. (Näherung)



Herleitung:

$$\vec{r}_{\text{Sonne}} := \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \quad \text{SPS} \rightarrow \text{im SP-System: } \vec{R} = 0 \quad (1)$$

≈ 0
 $\sim 10^{-3}$, sogar für Jupiter

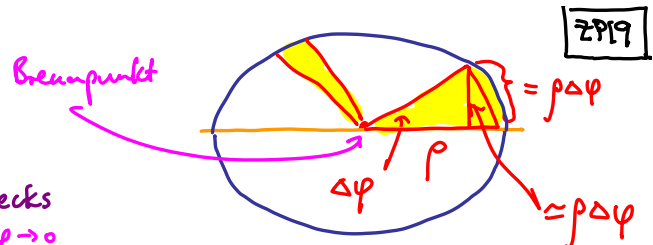
$$\vec{r}_{\text{Planet}} := \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} = \frac{m_s}{M} \vec{r} \quad \text{SPS} \quad (2)$$

> 0.991

$\Rightarrow \vec{r}_{\text{Sonne}}, \vec{r}_{\text{Planet}}$ beschreiben gegenphasige Ellipsen;

Schwerpunkt liegt in einem Brennpunkt.

2. Die vom Fahrstrahl pro Zeit überstrichene Fläche dF ist konstant



gilt im Limes $\Delta\varphi \approx 0$ Fläche des Dreiecks

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{1}{2} r \cdot r' \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta\varphi \rightarrow 0} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{L}{\mu} = \text{konstant!} \quad (1)$$

3. Quadrat der Umlaufzeit ist proportional zur dritten Potenz der großen Halbachse.

Herleitung:

Fläche der Ellipse:

$$\pi ab = F = \int dF \quad \text{eine Umdrehung} = \int_0^T \left(\frac{dF}{dt} \right) dt = T \frac{L}{2\mu} \quad (2)$$

$(1) = \frac{1}{2} \frac{L}{\mu}$

$$\begin{aligned} b^2 \left(\frac{\mu}{l} \right)^2 &= a p \frac{\mu^2}{l^2} \quad (14.1) \rightarrow \mu/l \\ &= a \mu / \alpha \end{aligned}$$

$$T^2 = (2\pi a)^2 \cdot \left(\frac{b\mu/l}{\alpha} \right)^2 = 4\pi^2 \frac{\mu}{\alpha} a^3 \quad (3)$$

$= a \mu / \alpha$

$$\frac{\mu}{\alpha} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{G m_1 m_2} = \frac{1}{G(m_1 + m_2)} \approx \frac{1}{G m_s} \quad (4)$$

= etwa gleich für alle Planeten. (laut Kepler)