

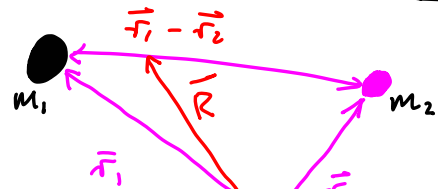
Zentralpotential

V12

20.05.08

ZP1

Zweikörperproblem



$$L_{\text{tot}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) =$$

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (1)$$

Symmetrie

1. Translation
2. Zeit transl.
3. Rotationsinv.

Erhaltungsgröße

- Schwerpunktsimpuls
Energie
Drehimpuls

Vereinfachung

- Einteilchenproblem
Dgl. 1. Ordnung
Radialgl.

Schwerpunktskoordinate:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

Relativkoordinate:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (2)$$

(1), (2) in (1.1):

$$L_{\text{tot}} = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2}_{L_M(\dot{\vec{R}})} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(r)}_{L(r, \dot{\vec{r}})} \quad (3)$$

siehe ZP2a.6)

$$M = m_1 + m_2$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

"reduzierte Masse" (4)

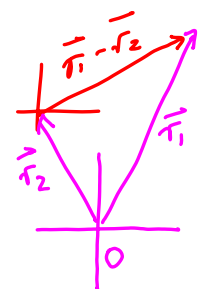
Sehr nützliche Vereinfachung: Dynamik von $\vec{R}$ und $\vec{r}$ entkoppelt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{R}}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (M \dot{\vec{R}}) = 0$$

 $\vec{R} = \text{zyklisch} \Rightarrow \vec{P} = M \dot{\vec{R}} = \text{Schwerpunktsimpuls ist erhalten}$

$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_{\text{sp}} t \quad (5)$$



Zwischenrechnung : Transformation zu Schwerpunkt und Relativkoordinaten

2P2a

Transformation : $\vec{R} = \frac{1}{M}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)$ (1a), $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (1b)

Rücktransformation : $\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r}$ (2a), $\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r}$ (2b)

$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}}$ (3a), $\dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}}$ (3b)

Kinetische Energie : $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2$ (4)

$$= \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right)^2 \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} m_1 m_2 \cancel{2 \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} (1 - 1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{M^2} (m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2) \dot{\vec{r}}^2 \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\vec{r}}^2 \quad (7)$$

□.

Relativkoordinate:

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \stackrel{(2.4)}{=} \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - U(r)$$

(1) 2P3

$L(\vec{r})$ beschreibt ein effektives Einteilchenproblem für $\vec{r}$!!

Wähle
Zylinderkoordinaten
als verallg. Koord.:

$$\vec{r} := (r, \varphi, z) \equiv (q_1, q_2, q_3) \quad r^2 = \rho^2 + z^2 \quad (2)$$

$$L = L(\rho, \varphi, z; \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \frac{1}{2} \mu (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\sqrt{\rho^2 + z^2}) \quad (3)$$

(LG2):

$$q_1 = \rho :$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = \frac{\partial L}{\partial \rho} \Rightarrow \mu \ddot{\rho} = \mu \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial \rho} \quad (4)$$

$$q_2 = \varphi :$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\underbrace{\mu \rho^2 \dot{\varphi}}_L) = 0 \quad \text{Drehimpuls-erhaltung!} \quad (5)$$

$$q_3 = z :$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z} \Rightarrow \mu \ddot{z} = - \frac{\partial U}{\partial z} = \left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) U'(\sqrt{\rho^2 + z^2}) \quad (6)$$

ZP6

Erhaltene Energie:

(1) ist DGL
1. Ordnung für $\rho(t)$

$$E \stackrel{(5.6)}{=} \underbrace{\frac{1}{2} \mu \dot{\rho}^2}_T + \underbrace{\frac{\ell^2}{2\mu\rho^2} + U(\rho)}_{U_{\text{eff}}(\rho)} \quad \text{"Effektives Potential für Radialbewegung"}$$

(1)

Effektive Radialkraft:

$$-\partial_{\rho} U_{\text{eff}} = \frac{\ell^2}{\mu\rho^3} - \partial_{\rho} U = (5.2)_{\text{rechts}} \checkmark$$

(2)

Wir kennen nun
im Prinzip:

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_{sp} t, \quad \begin{array}{ll} \rho(t) & \text{aus (6.1)} \\ \varphi(t) & \text{aus (4.2)} \\ z(t) & \text{aus (4.1)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \dot{\varphi} = \frac{\ell}{\mu\rho^2} \\ z(t) = 0 \end{array} \quad (3)$$

Zahl der Integrations-
Konstanten:

Allgemein erwartet:
Lösung v. 3 DGL 2. Ord
für je $\vec{r}_1(t)$ und $\vec{r}_2(t)$
erfordert 12 Int.-Konst:
 $\vec{r}_1(0), \dot{\vec{r}}_1(0), \vec{r}_2(0), \dot{\vec{r}}_2(0)$

Wir haben hier:

$$\left. \begin{array}{ll} \vec{R}_0, \vec{v}_{sp} & : 3 + 3 \\ \ell, E & : 2 \\ z(0), \dot{z}(0) & : 2 \\ \rho(0), \varphi(0) & : 2 \end{array} \right\} 12 \quad (4) \quad \checkmark$$

Lösung v. Radial-Gl:

$$(6.1) : E = \frac{\mu}{2} \dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}}(\rho)$$

(1) ZP7

$$\frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho} = \pm \left[\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(\rho)) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8.1) \quad (2)$$

Separation d. Variablen:
Integriere:

$$t - t_0 = \int_{t_0}^t dt' = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\pm \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U_{\text{eff}}(\rho')]} } = \text{Funktion von } \rho \quad (3)$$

$\rho(t)$:

$$\Rightarrow t = t^{(\pm)}(\rho) \text{ bekannt,} \quad (4)$$

$$\text{diese Relation invertieren} \Rightarrow \rho = \rho(t) \text{ bekannt!} \quad (5)$$

$\varphi(t)$:

$$\rho(t) \text{ eingesetzt in } \dot{\varphi} \stackrel{(4.2)}{=} \frac{\ell}{\mu\rho^2} \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t) \text{ bekannt!} \quad (6)$$

$$\text{Integrieren,} \Rightarrow \varphi = \varphi(t) \text{ bekannt!} \quad (7)$$

Bahnkurve: $p = p(\varphi)$

(ohne Zeitabhängigkeit anzugeben)

ZP8

Analog zu (L49.1):

$$\leftarrow \varphi = \varphi(t(p)). \quad (4.2) \quad (7.2)$$

$$\frac{d\varphi}{dp} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dp} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{p}} = \left(\frac{l}{\mu p^2} \right) \frac{1}{\left(\pm \left[\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(p)) \right] \right)^{1/2}} \quad (1)$$

Separation d. Variablen:

Integration:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi' = \int_{p_0}^p \frac{dp' \left(l / \mu p'^2 \right)}{\pm \left[\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(p')) \right]^{1/2}} \quad (2)$$

= Funktion v. p

$$\varphi = \varphi(p) \quad \text{bekannt} \quad (3)$$

$$\text{Diese Relation invertieren} \Rightarrow p = p(\varphi) \quad \text{bekannt.} \quad (4)$$

Qualitative Diskussion der Bewegung (WICHTIG!)

ZP9

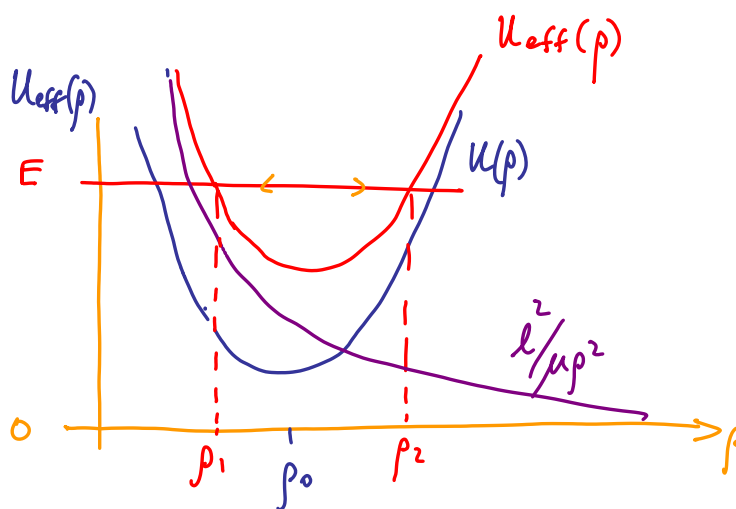
Typischer Fall 1:

z.B. für

$$U(p) = \alpha (p - p_0)^2$$

Harmonische Osz. mit
Gleichgewichtsabstand p_0

(z.B. Vibs. eines
2-atomigen Moleküls)



$$\text{für } \left\{ \begin{array}{l} p \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0 \end{array} \right\} U_{\text{eff}}(p) \rightarrow \infty$$

„nur“ gebundene
Bewegung
möglich (1)

$$p_1, p_2: \text{ Umkehrpunkte bei } U_{\text{eff}}(p_1) = U_{\text{eff}}(p_2) = E \quad (2)$$

Typischer Fall 2:

z.B. für

$$U(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho}$$

Gravitations- oder
Coulomb-Potential

2 Arten von Bewegung
sind möglich:

(i)

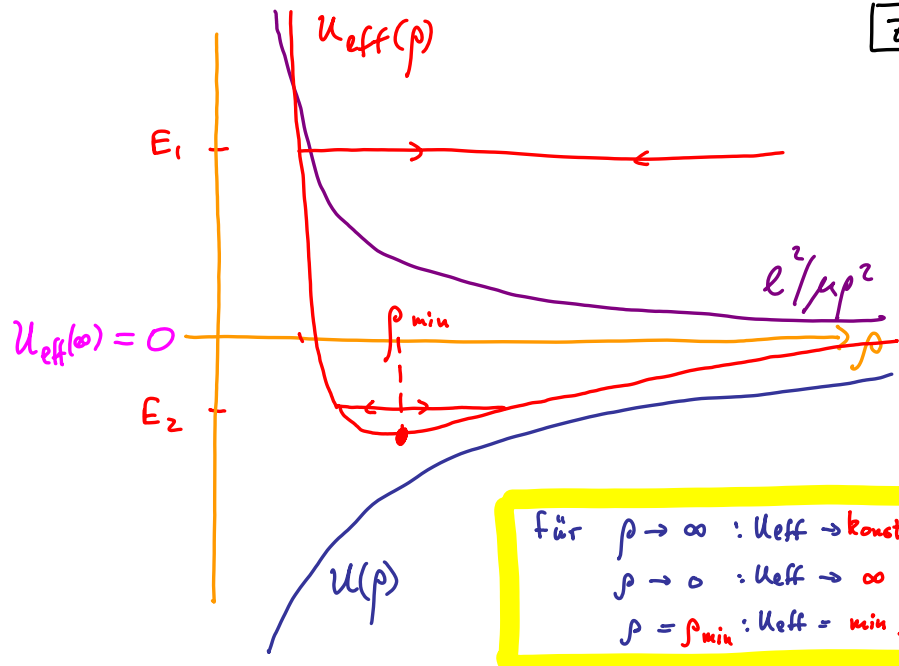
↖ hier = 0 gemalt
 $E_1 > U_{\text{eff}}(\infty) :$

(ii)

$E_2 < U_{\text{eff}}(\infty) :$

ungebundene Bewegung
"Streuung durch
Zentrifugalbarriere"

gebundene Bewegung



ZP11

Typischer Fall 3:

z.B. für

$$U(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho^3}$$

3 Arten v. Bewegung
sind möglich:

(i)

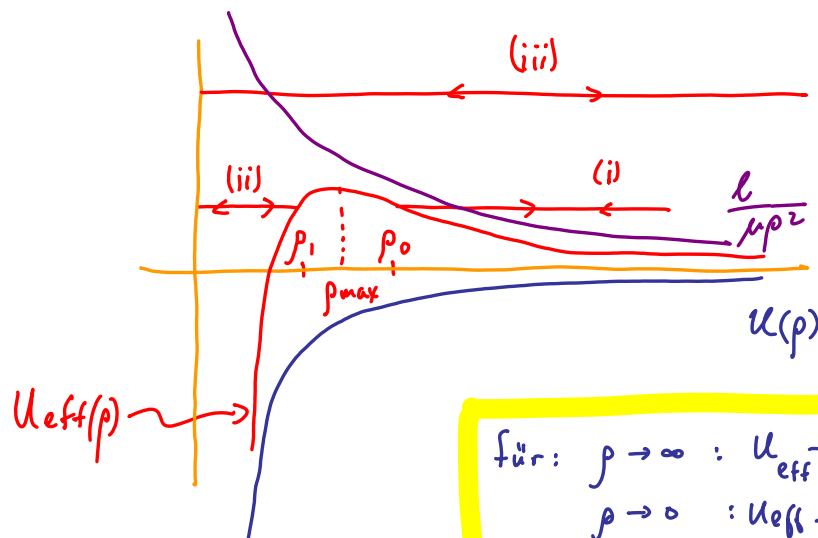
(ii)

(iii)

Streuung: $\rho \geq \rho_0$ (immer) Umkehrpunkt

Gebundene Bewegung: $0 \leq \rho \leq \rho_1$

Fall ins Zentrum (läuft durch's Zentrum hindurch)

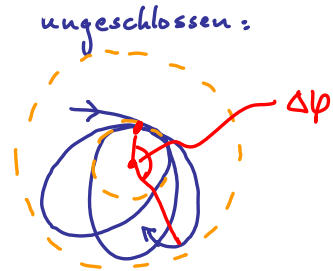
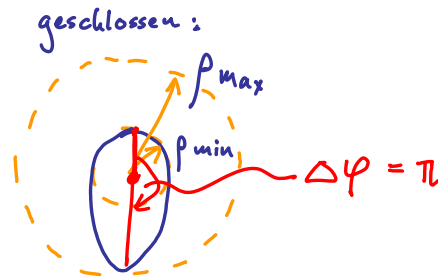


ZP11

Gebundene Bwg: ist Bahn geschlossen oder nicht? hängt von $U(\rho)$ ab!

ZP 12

$\Delta\varphi$ sei
Winkeländerung
zwischen
 $\rho = \rho_{\min}, \rho_{\max}$



Bedingung für
geschlossene Bwg:

Bahn schließt nach n Schleifen: $n 2\Delta\varphi = 2\pi m$ (1)

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 \stackrel{(8.2)}{=} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{d\rho' (l/\mu\rho'^2)}{\left[\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(\rho')) \right]^{1/2}} \stackrel{??}{=} \frac{\pi m}{n} \quad (2)$$

hängt v. U ab!

Nachrechnen:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} \pi & \text{für } U = -\frac{\alpha}{\rho} \quad \stackrel{(2)}{\Rightarrow} n=1 \Rightarrow \text{Bahn ist Ellipse} \\ \pi/2 & \text{für } U = \alpha \rho^2 \quad \Rightarrow n=2 \Rightarrow \text{Bahn schließt nach 2 Schleifen} \end{cases} \quad (3)$$

Kepler problem (Fließbach, Kap. 17)

ZP 13

Gravitations-
oder Coulomb-Pot:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \quad \text{z.B.: } \alpha = \begin{cases} G m_1 m_2 & \text{grav. Pot} \\ -q_1 q_2 & \text{Coulomb-Pot} \end{cases} \quad (1)$$

Effektives Pot:

$$U_{\text{eff}}(\rho) \stackrel{(7.1)}{=} -\frac{\alpha}{\rho} + \frac{l^2}{2\mu\rho^2} \quad (2)$$

Für diese Form ist Bahnkurve lösbar!

$$(8.2): \quad \varphi - \varphi_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho' (l/\mu\rho'^2)}{\left\{ \frac{2}{\mu} \left(\mu E - \left[-\frac{\mu\alpha}{\rho'} + \frac{l^2}{2\mu\rho'^2} \right] \right) \right\}^{1/2}} \quad (3)$$

$$\varphi - \varphi_0 = \arcsin \left\{ \frac{l/\rho - \mu\alpha/l}{[2\mu E + \mu^2 \alpha^2 / l^2]^{1/2}} \right\} + \text{konst.} \quad (4)$$

durch Wahl v. φ_0

Definition:

Parameter: $p = \frac{l^2}{\mu \alpha}$,

ZP 14

(1)

Exzentrizität: $\varepsilon = \left[1 + \frac{2E l^2}{\mu \alpha^2} \right]^{1/2}$

(2)

$\frac{1}{p} \frac{\mu \alpha}{l} \cos \varphi \quad (13.4):$

$\frac{\mu \alpha}{l^2} \cos \varphi \stackrel{(14.4)}{=} \frac{l/p - \mu \alpha / l^2}{\left[\frac{2 \mu E l^2}{\mu^2 \alpha^2} + \frac{\mu^2 \alpha^2 l^2}{l^2 \mu^2 \alpha^2} \right]^{1/2}} = \varepsilon$

(3)

$\frac{1}{p} \cos \varphi = \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p} \right] \frac{1}{\varepsilon}$

(4)

$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} [1 + \varepsilon \cos \varphi]$

(5)

Bahukurve:

(durch clevere Ausnutzung von E- und l-Erhaltung!)

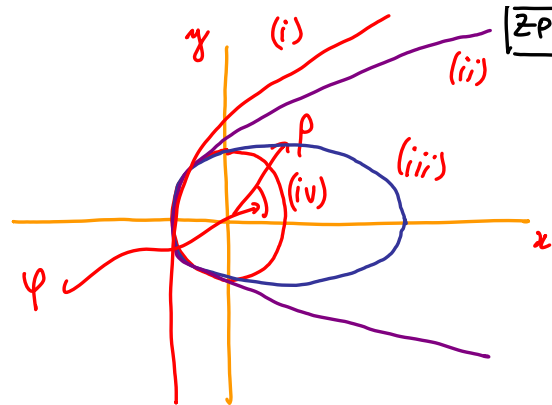
$$p(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

(6)

(14.6) beschreibt Kegelschnitte:

$p(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$

$\varepsilon = \left[1 + \frac{2E l^2}{\mu \alpha^2} \right]^{1/2}$



ZP 15

(1)

(i) $E > 0 \Rightarrow \varepsilon > 1 \Rightarrow \text{Hyperbel}$

(ii) $E = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1 \Rightarrow \text{Parabel}$

(iii) $E < 0 \Rightarrow \varepsilon < 1 \Rightarrow \text{Ellipse}$

(iv) $E = -\frac{\mu \alpha^2}{2l^2} \Rightarrow \varepsilon = 0 \Rightarrow \text{Kreis}$

$\varepsilon \cos \varphi \rightarrow -1 \text{ möglich} \Rightarrow p \rightarrow \infty \text{ möglich}$

$$\begin{cases} p_{\max} = \frac{p}{1 - \varepsilon} \\ p_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon} \\ \Delta \varphi = \pi \end{cases}$$

(2)

(vergleiche 12.3)

$p = p$, unabhängig von φ ! (3)

Bahngleichung:

Wir zeigen nun, dass (1) eine Ellipse beschreibt:

$$\begin{aligned} a &= \frac{P}{1-\varepsilon^2} \quad (7) \\ \text{große } \left. \begin{array}{l} \text{Halbachse} \\ \text{kleine} \end{array} \right\} & \\ b &= \frac{P}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \quad (8) \\ &= \sqrt{pa} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{P}{1+\varepsilon \cos \varphi} \quad (1)$$

(1)

ZP 16

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\rho} \quad (2)$$

(2)

$$\rho = \rho + \varepsilon \rho \cos \varphi \quad (3)$$

(3)

$$(P - \varepsilon x)^2 = \rho^2 = x^2 + y^2 \quad (4)$$

(4)

$$P^2 = x^2(1 - \varepsilon^2) + 2\varepsilon xP + y^2 \quad (5)$$

(5)

$$= (1 - \varepsilon^2) \left[x + \varepsilon \frac{P}{1 - \varepsilon^2} \right]^2 - \varepsilon^2 \frac{P^2}{1 - \varepsilon^2} + y^2 \quad (6)$$

(6)

$$\frac{1}{b^2} [(9) + \varepsilon^2 b^2] : \quad \frac{P^2}{b^2} + \varepsilon^2 b^2 = \frac{1}{b^2} (1 - \varepsilon^2) \left[x + \varepsilon a \right]^2 + \frac{y^2}{b^2} \quad (10)$$

(10)

$$(8) \quad \frac{P^2}{b^2} = 1 \quad (9) \quad \frac{1}{Pa} \quad \frac{P}{a} = \frac{1}{a^2}$$

(16.10) = Ellipse:

$$\frac{(x + \varepsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

(1)

ZP 17

Check Skizze:

$x = 0$:

$$y^2 = (1 - \varepsilon^2) b^2 = P^2 \quad \checkmark \Rightarrow y = \pm P \quad (2)$$

(2)

$x = -\varepsilon a$:

$$y^2 = b^2 \quad \checkmark \Rightarrow y = \pm b \quad [b = \text{kleine Halbachse}] \quad (3)$$

(3)

$y = 0$:

$$x^2 + 2\varepsilon ax + a^2(\varepsilon^2 - 1) = 0 \quad (4)$$

(4)

$$x = -\varepsilon a \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\varepsilon^2 a^2 - 4a^2(\varepsilon^2 - 1)} \quad (5)$$

(5)

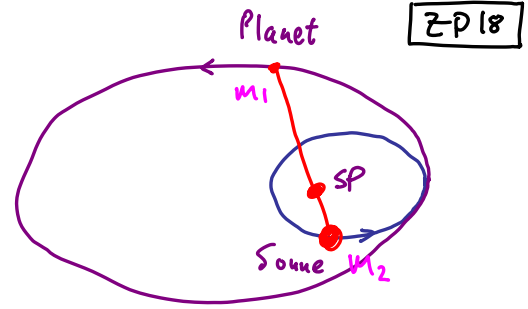
$$= -\varepsilon a \pm a = a \left\{ \begin{array}{l} 1 - \varepsilon \\ -1 - \varepsilon \end{array} \right\} \quad \checkmark \quad (6)$$

(6)

$\uparrow [a = \text{große Halbachse}]$

Kepplersche Gesetze:

1. Planetenbahnen sind Ellipsenbahnen mit Sonne in einem Brennpunkt.



Herleitung:

$$\vec{r}_{\text{Sonne}} := \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \quad \text{im SP-System} \quad (1)$$

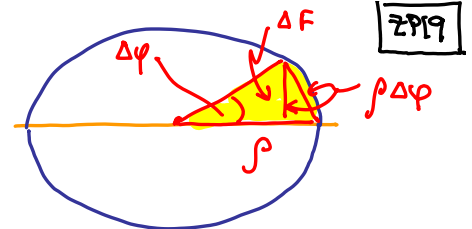
$\text{SPS} = -\frac{m_P}{M} \vec{r} \approx 0$
 $\leq 10^{-3}$, sogar für Jupiter.

$$\vec{r}_{\text{Planet}} := \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad \text{SPS} \quad (2)$$

$\frac{m_2}{M} \vec{r} \approx \vec{r}$
 > 0.999

$\Rightarrow \vec{r}_{\text{Sonne}}, \vec{r}_{\text{Planet}}$ beschreiben gegenläufige Ellipsen;
 Schwerpunkt liegt in einem Brennpunkt.

2. Die vom Fahrstrahl pro Zeit überstrichene Fläche dF ist konstant



Herleitung:

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho \cdot \rho \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} \stackrel{(4.2)}{=} \frac{1}{2} \frac{L}{\mu} \quad (1)$$

Fläche des Dreiecks

3. Quadrat der Umlaufzeit ist proportional zur dritten Potenz der großen Halbachse.

Herleitung:
 Fläche der Ellipse:

$$\pi a b = F = \int dF = \int_0^T \underbrace{\left(\frac{dF}{dt} \right)}_{(1) = \frac{1}{2} \frac{L}{\mu}} dt = \frac{T L}{2 \mu} \quad (2)$$

eine Umdrehung

$$\begin{aligned} \overset{ap}{\uparrow} (11.5) \quad \overset{(14.1)}{\uparrow} \mu/\alpha \\ b \left(\frac{\mu}{L} \right)^2 &= a \frac{\mu}{L} \frac{L}{\mu} \\ &= a \mu/\alpha \end{aligned}$$

$$T^2 = (2\pi a)^2 \cdot \underbrace{\left(\frac{\mu}{L} \right)^2}_{= \mu/\alpha} = 4\pi^2 \frac{\mu}{\alpha} a^3 \quad (3)$$

$$\frac{\mu}{\alpha} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{1}{g_{m_1 m_2}} = \frac{1}{g(m_1 + m_2)} \approx \frac{1}{g m_s} \quad (4)$$

= etwa gleich für alle Planeten.