VARIATIONSPRINZIPIEN

V13 - 27.05.08

Ziel: Herleitung v. (LG2) aus einem Variationsprinzip (VP), das sog. "Hamiltonsche VP". (siehe S. 67)

Mathematisches Rüstzeug: "Variationsrechnung"

Variation ohne Nebenbedingungen (Fließbach, Kap. 12)

Allgemeine Problemstellung

$F(y, y', x)$ sei eine gegebene Funktion v. y, y', x

$y = y(x)$ sei eine Funktion v. x, mit

$$y' = y'(x) = \frac{\partial y(x)}{\partial x}$$

Ein "Funktional" $J[y]$ [angedeutet durch eckige Klammern] bildet Funktion $y(x)$ auf Zahl ab.

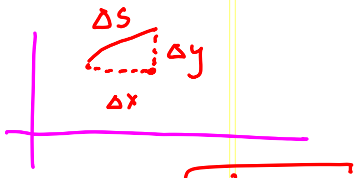
Welche Funktion $y(x)$ macht das Funktional

$$J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y(x), y'(x), x) \qquad (1)$$

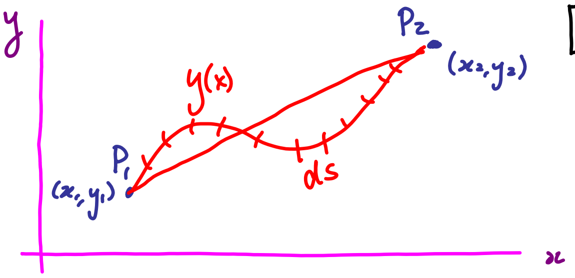
extremal, unter Randbedingungen

$$y(x_1) = y_1 \quad ? \qquad (2)$$
$$y(x_2) = y_2$$

Konkretes Beispiel (Teil 1):



$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \qquad (1)$$



Frage: Welche Funktion $y(x)$ minimiert die Bogenlänge zwischen P_1 und P_2 ?

"Geratene" Antwort: $y(x) = ax + b = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1) + y_1$ (2)

Variationsrechnung ist ein systematisches Verfahren, solche Fragen zu beantworten!

Bestimmung des "Abstands-Funktionals":

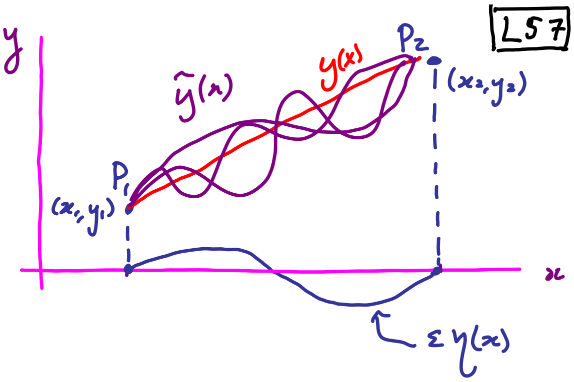
$$\boxed{J = J[y]} = \sum_{i=1}^{N} (\Delta s)_i = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \qquad (3)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i \sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)}_{\to\, y' = \frac{dy}{dx}}^2} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{N \to \infty} \boxed{\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + (y')^2}} \qquad (4)$$

Wir werden bald (Seite 59) zeigen: Minimierung von (4) liefert (2) !!

Ende v. Beispiel (Teil 1)

Strategie zur Findung der Extremalfunkt:
"Variationsprinzip"



Gesuchte Fkt. sei $y(x)$ (1)

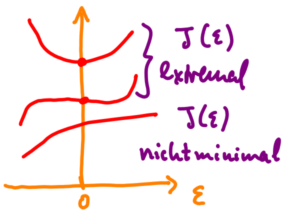
Vergleichsfkt. sei $\tilde{y}(x) = y(x) + \underset{\text{infinitesimal}}{\varepsilon}\,\underset{\text{beliebig}}{\eta(x)}$ (2)

mit Randbedingung: $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ (3)

weil $\left.\begin{matrix}\tilde{y}(x_1) = y(x_1)\\ \tilde{y}(x_2) = y(x_2)\end{matrix}\right\}$ fest vorgegeben ist

Extremalbedingung: $J[\overbrace{y+\varepsilon\eta}^{\tilde{y}}]$ sei extremal bei $\varepsilon = 0$ (4)

$J(\varepsilon) := J[y+\varepsilon\eta]$



Mathematisch formuliert : $$\boxed{0 = \left.\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{dJ[y+\varepsilon\eta]}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}} \quad (5)$$

Konsequenzen v.(57.5)

$$J[y+\varepsilon\eta] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y+\varepsilon\eta\,,\, y'+\varepsilon\eta'\,,\, x) \qquad \frac{\partial\eta(x)}{\partial x} \quad (1)$$

Taylor-Entwicklun in ε um ε=0 : (siehe Seite 58a) ("normale" Taylor-Entwicklung in 2 Variablen)

$F = F(y_0+\Delta y)$

$= F(y_0) + \Delta y\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\Big|_{y_0} + \mathcal{O}(\Delta y)^2$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ F(y,y',x) + \underbrace{\frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y}}_{\equiv F_y} \varepsilon\eta(x) + \underbrace{\frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y'}}_{\equiv F_{y'}} \varepsilon\eta'(x) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2)$$

$$\left.\frac{J[y+\varepsilon\eta]}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \overset{(57.5)}{=} 0 \Longrightarrow 0 = \left.\frac{d\,J[y+\varepsilon\eta]}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \overset{(2)}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \overset{=0}{\cancel{F}} + F_y \overset{\frac{d\varepsilon}{d\varepsilon}=1}{\cancel{\varepsilon}}\eta(x) + \underset{\underset{f}{\parallel}}{F_{y'}} \cancel{\varepsilon} \underset{\underset{g'}{\parallel}}{\eta'(x)} + \underset{=0}{\cancel{\mathcal{O}(\varepsilon^2)}} \right\} \quad (3)$$

$\left.\frac{d\varepsilon^2}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$

part. Int.: $-f'\,g$; $[f\,g]_1^2$

Partielle Integration vom $F_{y'}\eta'(x)$ -Term:

$\int_1^2 fg' = [fg]_1^2 - \int f'g$

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\left\{ F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} \right\}}_{h(x)} \eta(x) + \underbrace{\left[F_{y'}\,\eta(x) \right]_{x_1}^{x_2}}_{=0 \ (57.3)} \quad (4)$$

(4) muss für beliebige $\eta(x)$ gelten :

$0 = \int dx\, h(x)\,\eta(x) \quad \forall\, \eta(x) \Rightarrow h(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0} \quad (5)$

Mathematischer Einschub:

L58a

$$J[y+\varepsilon\eta] = \int_{x_1}^{x_2} dx \, F(y+\varepsilon\eta \, , y'+\varepsilon\eta' \, , x) \qquad (1)$$

Taylor-Entwicklung in ε um $\varepsilon = 0$:

$\downarrow$ ("normale" Taylor-Entwicklung in 2 Variablen)

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ F(y, y', x) + \frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y} \varepsilon\eta(x) + \frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y'} \varepsilon\eta'(x) \right\} \qquad (2)$$

$$+ O(\varepsilon^2)$$

Zwischenrechnung: $F(u, w, x)$ sei Funktion v. drei Variablen

Betrachte: $F(u + \Delta u, w + \Delta w, x)$, $[\, u = \varepsilon\eta \, , \quad w = \varepsilon\eta' \,]$

Taylor-Entw. in ersten und zweiten Argument, um u (in Potenzen v. Δu) und um w (in Potenzen v. Δw), liefert:

$$F(u, u, x) + \frac{\partial F}{\partial u}(u, w, x)\Big|_{\Delta u} \Delta u + \frac{\partial F}{\partial w}(u, w, x) \Delta w$$

$$+ O(\Delta u^2, \Delta w^2, \Delta u \Delta w)$$

$\Rightarrow$ (2) ✓.

(58.5) explizit:

L59

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

{umschreiben mittels Def. von (58.2) für F_y, $F_{y'}$.}

"Euler-Lagrange-Gl. (ELG) der Variationsrechnung":

[Gl. für die gesuchte Funktion $y(x)$]

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{F(y, y', x)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y}} \qquad (1)$$

$y'' + y' = \ldots ?$

Beispiel: (Teil 2) minimale Bogenlänge?

Bogenlängenfunktional:

$$J[y] \overset{(56.4)}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \, \underbrace{\sqrt{1 + (y')^2}}_{F(\cancel{y}, y', \cancel{x})} \qquad (2)$$

$$F(y, y', x) \overset{(55.1)}{=} \sqrt{1 + y'^2} \qquad (3)$$

ELG: (1):

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \frac{2y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0 \qquad (4)$$

"Integration":

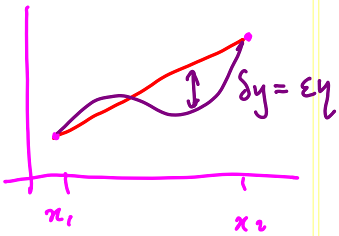
$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \text{konst} = x\text{-unabhängig} \qquad (5)$$

Gesuchte Funktion:

$$y(x) = ax + b = \text{Gerade} \qquad (6)$$

☺

Zusammenfassung der Herleitung in Kurznotation:



$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y, y', x) \qquad (1)$$

$$\delta J = J[y + \delta y] - J[y] \qquad (2)$$

$$\delta y \to 0: \quad \overset{(58.3)}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ F_y\, \delta y + F_{y'}\, \delta y' \right\} \qquad (3)$$

$$\overset{(58.4)}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y + \underbrace{\text{Randterm}}_{=0} \qquad (4)$$

beliebig

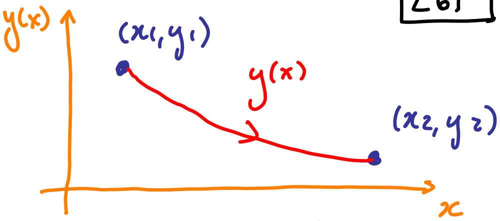
weil $\delta y = 0 \ \forall \ x_1, x_2$.

$$\delta J = 0 \iff \boxed{\frac{d}{dx} F_{y'} = F_y} \qquad (5)$$

Beispiel: Schnellster Fallweg?

„Problem der Brachistochrone", (Bernoulli)

[„brachistos" = kürzeste , „chronos" = Zeit]



Für welche Form der „Rutschbahn" $y(x)$ ist Rutschzeit minimal?

Für Animation des rollenden Teilchens, siehe: http://home.ural.ru/~iagsoft/BrachJ2.html

Historie: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Brachistochrone.html
Excerpt from an article by: J J O'Connor and E F Robertson

The brachistochrone problem was posed by Johann Bernoulli in Acta Eruditorum in June 1696:
"I, Johann Bernoulli, address the most brilliant mathematicians in the world. Nothing is more attractive to intelligent people than an honest, challenging problem, whose possible solution will bestow fame and remain as a lasting monument. Following the example set by Pascal, Fermat, etc., I hope to gain the gratitude of the whole scientific community by placing before the finest mathematicians of our time a problem which will test their methods and the strength of their intellect. If someone communicates to me the solution of the proposed problem, I shall publicly declare him worthy of praise."

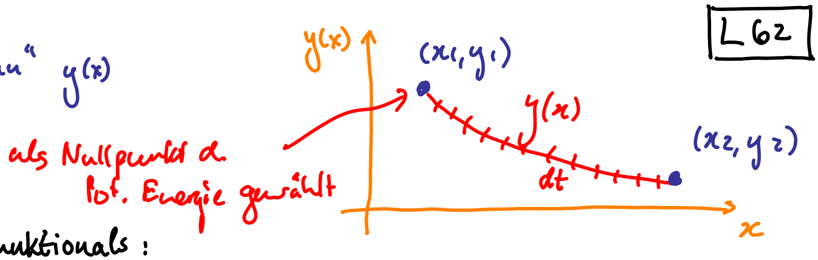
The problem he posed was the following:-
"Given two points A and B in a vertical plane, what is the curve traced out by a point acted on only by gravity, which starts at A and reaches B in the shortest time."

Now Johann Bernoulli and Leibniz deliberately tempted Newton with this problem. It is not surprising, given the dispute over the calculus, that Johann Bernoulli had included these words in his challenge:-
"...there are fewer who are likely to solve our excellent problems, aye, fewer even among the very mathematicians who boast that [they]... have wonderfully extended its bounds by means of the golden theorems which (they thought) were known to no one, but which in fact had long previously been published by others."

According to Newton's biographer Conduitt, he solved the problem in an evening after returning home from the Royal Mint. Newton:-
"... in the midst of the hurry of the great recoinage, did not come home till four (in the afternoon) from the Tower very much tired, but did not sleep till he

L62

Für welche Form der "Rutschbahn" $y(x)$ ist Rutschzeit minimal?



Bestimmung des "Rutschdauer-" Funktionals:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Rutschdauer:

$$t_{21} = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{ds}{v} \quad (1)$$

Bogenlänge

momentane Geschwindigkeit

$$\text{wobei:} \quad ds \overset{(56.2)}{=} dx\sqrt{1+y'^2} \quad (2)$$

Energie-Erhaltung: $\frac{1}{2} m v^2 + mg(y-y_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2g(y_1-y)} \quad (3)$

(3), (2) in (1):

$$t_{21} = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_1-y(x))}} \right\} \equiv F(y, y', \cancel{x}) \quad (4)$$

$\leftarrow (2)$ $\leftarrow (3)$

L63

ELG:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \overset{(59.1)}{=} \frac{\partial F}{\partial y} \quad (1)$$

konkret für (62.4), mit

$$F(y,y',x) = \frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_1-y(x))}} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_1-y)}}:$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{[2g(y_1-y)]^{1/2}} \frac{+\frac{1}{2}\cdot 2y'}{[1+y'^2]^{1/2}}\right] = [1+y'^2]^{1/2} \frac{(-\frac{1}{2})(-2g)}{[2g(y_1-y)]^{3/2}} \quad (2)$$

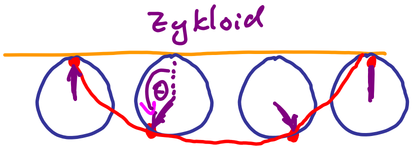
Diese Differentialgleichung bestimmt die Form der gesuchten Kurve y(x).
Ihre Lösung sei vollständigheitshalber (ohne Herleitung) erwähnt:

Integration liefert: $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] y = k^2$

$k = k(g, x_1, x_2, y_1, y_2)$

Parametrische Lösung: (= Zykloid)

$$x = \frac{1}{2}k^2(\theta - \sin\theta)$$
$$y = -\frac{1}{2}k^2(1-\cos\theta)$$



Für eine Herleitung, siehe:
http://mathworld.wolfram.com/BrachistochroneProblem.html

Für Animation einer Zykloide, siehe:
http://www.ies.co.jp/math/java/calc/cycloid/cycloid.html

L64

Verallgemeinerung:

Funktional v. mehreren Fkt. $y_1(x), \dots, y_N(x)$

$$J = J[y_1, \dots, y_N] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y_1, \dots, y_N;\, y_1', \dots, y_N';\, x) \qquad (1)$$

Randbedingung: $y_i(x_1) = y_{i1}, \quad y_i(x_2) = y_{i2} \qquad i = 1, \dots, N \qquad (2)$

Gesucht: N Funktionen $y_i(x)$, für die $J[y_1, \dots, y_N]$ extremal ist.

Vergleichsfkt: $\tilde{y}_i = y_i(x) + \varepsilon_i \eta_i(x)$ mit $\eta_i(x_1) = \eta_i(x_2) = 0$

(unabhängige Variationsparameter)

Extremalbedingung: $J[y_i + \varepsilon_i \eta_i]$ sei minimal bei $\varepsilon_i = 0$

$$\left.\frac{dJ[y_i + \varepsilon_i \eta_i]}{d\varepsilon_i}\right|_{\varepsilon_i = 0} = 0 \qquad \forall\, i = 1, \dots, N \qquad (3)$$

(denn ε_i sind alle unabhängig)

N mal dasselbe wie vorhin: ⇒

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial F(y_1, \dots, y_N;\, y_1', \dots, y_N', x)}{\partial y_i'} = \frac{\partial F(\;)}{\partial y_i}, \quad \forall\, i = 1, \dots, N} \qquad (4)$$

L65

Weitere Verallgemeinerung:

(zur Kenntnisnahme)

N Fkt. $y_i(x_\nu) := y_i(x_1, \dots, x_R) \quad \forall\, i = 1, \dots, N$

jeweils als Fkt. v. R Variablen, x_ν, $\nu = 1, \dots, R \qquad (1)$

Funktional:

$$J[y_i] := J[y_1, \dots, y_N] = \underbrace{\int dx_1 \dots \int dx_R}_{B = \text{Integrationsbereich} \in \mathbb{R}^R} F\Big[\overset{i=1,\dots,N}{y_i},\ \underset{\nu = 1, \dots, R}{\overset{\equiv \partial_\nu y_i}{\boxed{\frac{\partial y_i}{\partial x_\nu}}}},\ x_\nu\Big) \qquad (2)$$

Randbedingungen: Alle $y_i(x_\nu)$ seien auf Rand vom B fest vorgegeben

Gesucht: Funktionen $y_i(x_\nu)$, für die $J[y_i]$ extremal ist

Vergleichsfunktion: $\tilde{y}_i = y_i(x_1, \dots, x_R) + \varepsilon_i \eta_i(x_1, \dots, x_R)$ [N unabhängige Variationsfunktionen jeweils abhängig v. R Parametern x_ν] (3)

mit Ableitungen: $\partial_\nu \tilde{y}_i = \underset{\equiv}{\partial_\nu} y_i + \varepsilon_i \underset{\equiv}{\partial_\nu} \eta_i$

$\boxed{L66}$

Extremalbedingung: [wie (61.4)]

$$0 = \frac{dJ[y_i + \varepsilon_i \eta_i]}{d\varepsilon_i}\bigg|_{\varepsilon_i = 0} \qquad (1)$$

ε_i sind alle unabhängig:

$$0 = \int_B dx_1 \dots dx_N \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_i} \eta_i + \underbrace{\overbrace{\sum_{\nu=1}^{R} \left(\frac{\partial F}{\partial(\partial_\nu y_i)} \right) \partial_\nu \eta_i}^{\text{Verallg. von } \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'}} \right\} \qquad \forall\, i = 1, \dots, N \qquad (2)$$

partielle Integration

η_i beliebig: $\Rightarrow$

$$0 = \int_B dx_1 \dots dx_N \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_i} - \sum_{\nu=1}^{R} \left(\frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial(\partial_\nu y_i)} \right) \right) \right\} \eta_i + \text{Randterme} \quad (=0)$$

$$\forall\, i = 1, \dots, N \qquad (3)$$

N - EL-Gleichungen:

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{R} \frac{d}{dx_\nu} \left(\frac{\partial F}{\partial(\partial_\nu y_i)} \right) = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \forall\, i = 1, \dots, N} \qquad (4)$$

Weitere mögliche Verallg.:

(i) Höhere Ableitungen, z.B. $F(y, y', y'', y''')$ ..

(ii) keine Randbedingungen vorgeben ...

(iii) Variation mit Nebenbedingungen ...

$\boxed{L67}$

Hamiltonsches Prinzip der kleinsten (extremalen) Wirkung

(Fließbach, 14)

Def: "Wirkung"

$$S = S[q] := \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot q, t) \qquad (1)$$

$(\dot q_1, \dots, \dot q_f)$ geschw.

$(q_1, \dots, q_f)$ Koordinaten

Das Funktional $S[q]$ wird die "Wirkung" der Bahnkurve $q(t)$ genannt.

"action": Einheiten: Energie × Sekunde

Hamiltonsche Prinzip (HP): Dynamische Evolution $q(t)$ des Systems zwischen $q(t_1) = q_1$ und $q(t_2) = q_2$ erfolgt so, dass die Wirkung extremal wird,

$$\delta S[q] = 0 \qquad (2)$$

unter Variation der Bahnkurve $q(t)$

mit Randbedingung $\delta q(t_1) = 0, \quad \delta q(t_2) = 0 \qquad (3)$

Beweis:

L68

Identifiziere: $F \leftrightarrow L$, $y_i \leftrightarrow q_i$, $x \leftrightarrow t$ (1)

$$\frac{dy_i}{dx} = y_i' \leftrightarrow \dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$$

ELG (64.4):

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = \frac{\partial F}{\partial y_i}:$$

$$\boxed{\delta S[q] = 0 \iff \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \forall\, i = 1, \dots, f}$$

(2)

ELG für Hamiltonsches Prinzip liefern LG2 !!

denn $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$ i.Allg $\sim \ddot{q}_i$

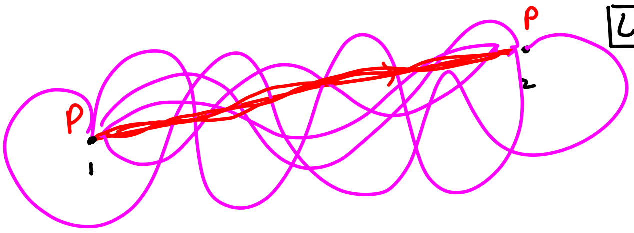
f Diff-Gl. 2. Ordnung $\Longrightarrow$ $2f$ Integrationskonst.

entweder: $q_1, \dots, q_f$ und $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$, bei $t = t_1$

oder: $q_1, \dots, q_f$ bei $t = t_1$ und $t = t_2$

Quantenmechanik à la Feynman

L69



Freies Teilchen: $S = \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\tfrac{1}{2} m \dot{x}^2(t)}_{L(x,\dot{x})}$

Klassisch:

Weg ist bestimmt durch: $\delta S = 0$, $\xrightarrow{(67.2)}$ $m \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \Longrightarrow x = vt + x_0$ ✓

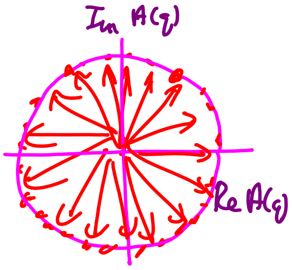
Quantenmechanisch:

Wahrscheinlichkeit, von P_1 nach P_2 in Zeit $t = t_2 - t_1$ zu gelangen, ist:

$$W_{1\to 2} = \Big| \sum_{\substack{\text{alle Wege} \\ \text{zwischen } 1\to 2}} \underbrace{e^{iS[q]/\hbar}}_{A[q]\in\mathbb{C}} \Big|^2$$

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ = Planck'sche Konstante $= 10^{-34}$ J$\cdot$s

Für die meisten Wege mitteln sich die Phasen weg.



Ausser für die Wege für die $\delta S = 0$

Bündel um den klassischen Weg

$\Longrightarrow$ Hamiltonsche Prinzip !!