

VARIATIONS PRINZIPIEN

V13 - 27.05.08

L55

Ziel:

Herleitung v. (LGZ) aus einem Variationsprinzip (VP),
das sog. "Hamiltonsche VP". (siehe S. 67)

Mathematisches Rüstzeug: "Variationsrechnung"

Variation ohne Nebenbedingungen (Fließbach, Kap. 12)

Allgemeine
Problemstellung

$F(y, y', x)$ sei eine gegebene Funktion v. y, y', x

$y = y(x)$ sei eine Funktion v. x , mit

$$y' = y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$$

Ein "Funktional" $J[y]$
[angedeutet durch
eckige Klammern]
bildet Funktion $y(x)$
auf Zahl ab.

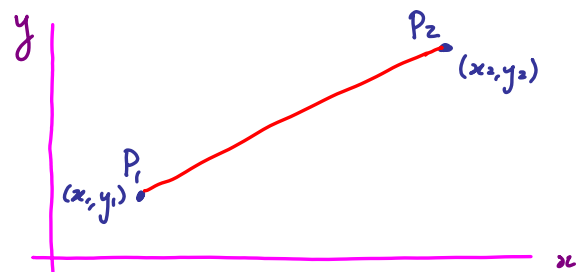
Welche Funktion $y(x)$ macht das Funktional

$$J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), y'(x), x) \quad (1)$$

extremal, unter Randbedingungen $y(x_1) = y_1$?
 $y(x_2) = y_2$? (2)

Konkretes Beispiel (Teil 1):

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (1)$$



L56

Frage: Welche Funktion $y(x)$ minimiert die Bogenlänge zwischen P_1 und P_2 ?

"Geratene" Antwort: $y(x) = ax + b = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1) + y_1$ (2)

Variationsrechnung ist ein systematisches Verfahren, solche Fragen zu beantworten!

Bestimmung des
"Abstands-Funktionals":

$$J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (3)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (4)$$

Wir werden bald (Seite 59) zeigen: Minimierung von (4) liefert (2) !! Ende v. Beispiel (Teil 1)

Strategie zur Findung der Extremalfunkt:

"Variationsprinzip"

Gesuchte Fkt. sei $y(x)$

Vergleichsfkt. sei $\hat{y}(x) = y(x) + \underbrace{\varepsilon \eta(x)}_{\text{infinitesimal}}$ (2)
beliebig

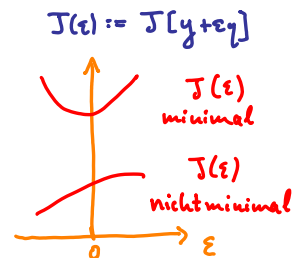
mit Randbedingung: $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ (3)
weil $\begin{cases} \hat{y}(x_1) = y(x_1) \\ \hat{y}(x_2) = y(x_2) \end{cases}$ fest vorgegeben ist

Extremalbedingung: $J(\varepsilon) := J[y + \varepsilon \eta]$ sei extremal bei $\varepsilon = 0$ (4)

Mathematisch formuliert:

$$\left. \frac{dJ[y + \varepsilon \eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

(5)



Konsequenzen v. (57.5)

$$J[y + \varepsilon \eta] = \int_{x_1}^{x_2} F(y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta', x) dx \quad (1)$$

Taylor-Entwicklung in ε um $\varepsilon = 0$: (siehe Seite 580) (normale Taylor-Entwicklung in 2 Variablen)

$$F = F(y_0 + \Delta y) = F(y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \Delta y + \dots$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ F(y, y', x) + \underbrace{\frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y}}_{= F_y} \varepsilon \eta(x) + \underbrace{\frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'}}_{= F_{y'}} \varepsilon \eta'(x) \right\} dx + O(\varepsilon^2) \quad (2)$$

$$\left. \frac{dJ[y + \varepsilon \eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \Rightarrow 0 = \left. \frac{dJ[y + \varepsilon \eta]}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \cancel{F} + \cancel{F_y} \eta(x) + \cancel{F_{y'}} \eta'(x) + \cancel{O(\varepsilon^2)} \right\} dx \quad (3)$$

Partielle Integration vom $F_{y'} \eta'(x)$ -Term:

$$\int_1^2 f g' = [f g]_1^2 - \int_1^2 f' g$$

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \underbrace{F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}}_{h(x)} \eta(x) + \underbrace{F_{y'} \eta(x)}_{=0 \text{ (57.3)}} \right\} dx \quad (4)$$

(4) muss für beliebige $\eta(x)$ gelten:

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} h(x) \eta(x) dx \Rightarrow h(x) = 0 \quad \forall x \Rightarrow$$

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \quad (5)$$

L57

L58

$$J[y + \varepsilon \eta] = \int_{x_1}^{x_2} F(y + \varepsilon \eta, y' + \varepsilon \eta', x) \quad (1)$$

Taylor-Entwicklung in ε um $\varepsilon=0$:

(normale Taylor-Entwicklung in 2 Variablen)

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ F(y, y', x) + \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y} \varepsilon \eta(x) + \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} \varepsilon \eta'(x) \right\} \quad (2)$$

$+ O(\varepsilon^2)$

Zwischenrechnung: $F(u, w, x)$ sei Funktion v. drei Variablen

Betrachte: $F(u + \Delta u, w + \Delta w, x)$, $[u = \varepsilon \eta, w = \varepsilon \eta']$

Taylor-Entw. in erstem und zweitem Argument,

um u (in Potenzen v. Δu) und um w (in Potenzen v. Δw), liefert:

$$F(u, u, x) + \frac{\partial F(u, w, x)}{\partial u} \Big|_{\Delta u} \Delta u + \frac{\partial F(u, w, x)}{\partial w} \Delta w + O(\Delta u^2, \Delta w^2, \Delta u \Delta w)$$

$\Rightarrow (2) \checkmark$.

(58.5) explizit:

"Euler-Lagrange-Gl. (ELG)
der Variationsrechnung":
[Gl. für die gesuchte
Funktion $y(x)$]

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

{umschreiben mittels Def. von
(58.2) für $F_y, F_{y'}$.

L59

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y} \quad (1)$$

Beispiel: (Teil 2) minimale Bogenlänge?

Bogenlängenfunktional:

$$J[y] \stackrel{(56.4)}{=} \int_{x_1}^{x_2} \overbrace{\sqrt{1 + (y')^2}}^F \quad (2)$$

$$F(y, y', x) \stackrel{(55.1)}{=} \sqrt{1 + y'^2} \quad (3)$$

ELG: (1):

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \frac{2y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0 \quad (4)$$

"Integration":

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \text{konst.} = x\text{-unabhängig} \quad (5)$$

Gesuchte Funktion:

$$y(x) = ax + b = \text{Gerade} \checkmark \quad (6)$$

Zusammenfassung der Herleitung in Kurznotation:

L60

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x) \quad (1)$$

$$\delta J = J[y + \delta y] - J[y] \quad (2)$$

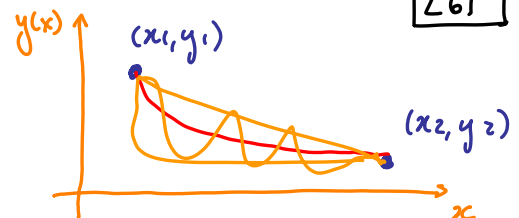
$$\delta y \rightarrow 0: \quad (58.3) \quad = \int_{x_1}^{x_2} \{ F_y \delta y + F_{y'} \delta y' \} \quad (3)$$

$$(58.4) \quad = \int_{x_1}^{x_2} dx \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y \quad \text{Randterm} + 0 \quad (4)$$

$\uparrow$ beliebig

$$\delta J = 0 \Leftrightarrow \quad (58.5) \quad \frac{d}{dx} F_{y'} = F_y \quad (5)$$

Beispiel: Schnellster Fallweg?
 "Problem der Brachistochrone", (Bernoulli)
 ["brachistos" = kürzeste, "chronos" = Zeit]



L61

Für welche Form der "Rutschbahn" $y(x)$ ist Rutschzeit minimal?

Für Animation des rollenden Teilchens, siehe: <http://home.ural.ru/~iagsoft/BrachJ2.html>

Historie: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Brachistochrone.html>
 Excerpt from an article by: J J O'Connor and E F Robertson

The brachistochrone problem was posed by Johann Bernoulli in Acta Eruditorum in June 1696:

"I, Johann Bernoulli, address the most brilliant mathematicians in the world. Nothing is more attractive to intelligent people than an honest, challenging problem, whose possible solution will bestow fame and remain as a lasting monument. Following the example set by Pascal, Fermat, etc., I hope to gain the gratitude of the whole scientific community by placing before the finest mathematicians of our time a problem which will test their methods and the strength of their intellect. If someone communicates to me the solution of the proposed problem, I shall publicly declare him worthy of praise."

The problem he posed was the following:-

"Given two points A and B in a vertical plane, what is the curve traced out by a point acted on only by gravity, which starts at A and reaches B in the shortest time."

Now Johann Bernoulli and Leibniz deliberately tempted Newton with this problem. It is not surprising, given the dispute over the calculus, that Johann Bernoulli had included these words in his challenge:-

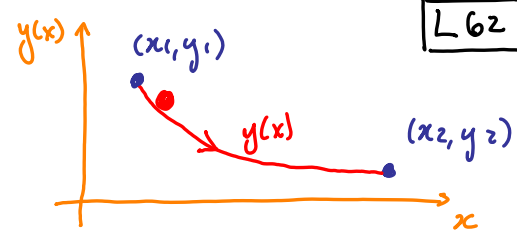
"...there are fewer who are likely to solve our excellent problems, aye, fewer even among the very mathematicians who boast that [they]... have wonderfully extended its bounds by means of the golden theorems which (they thought) were known to no one, but which in fact had long previously been published by others."

According to Newton's biographer Conduitt, he solved the problem in an evening after returning home from the Royal Mint. Newton:-

"... in the midst of the hurry of the great recoinage, did not come home till four (in the afternoon) from the Tower very much tired, but did not sleep till he

L 62

Für welche Form der "Rutschbahn" $y(x)$ ist Rutschzeit minimal?



Bestimmung des "Rutschdauer-" Funktional:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$t_{21} = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{ds}{v} \quad \begin{matrix} \text{Bogenlänge} \\ \text{momentane Geschwindigkeit} \end{matrix} \quad (1)$$

wobei: $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$ (56.2) (2)

Energie-Erhaltung: $\frac{1}{2} m v^2 + m g (y - y_1) = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2g(y_1 - y)}$ (3)

(3), (2) in (1): $t_{21} = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_1 - y(x))}} \equiv F(y, y', x)$ (4)

L 63

ELQ:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (1)$$

konkret für (62.4), mit

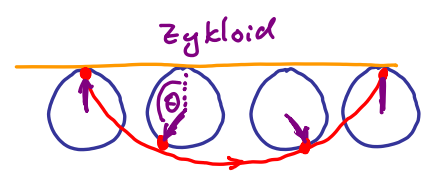
$$F(y, y', x) = \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(y_1 - y(x))}} : \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{[2g(y_1 - y)]^{1/2}} \frac{+ 1/2 \cdot 2y'}{[1 + y'^2]^{1/2}} \right] = [1 + y'^2]^{1/2} \frac{(-1/2)(-2g)}{[2g(y_1 - y)]^{3/2}} \quad (2)$$

für $y(x)$

Diese Differentialgleichung bestimmt die Form der gesuchten Kurve $y(x)$.
Ihre Lösung sei vollständigshalber (ohne Herleitung) erwähnt:

Integration liefert: $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] y = k^2$ $k = k(g, x_1, y_1, x_2, y_2)$

Parametrische Lösung:
(= Zykloid)
 $x = \frac{1}{2} k^2 (\theta - \sin \theta)$
 $y = -\frac{1}{2} k^2 (1 - \cos \theta)$



Verallgemeinerung:

Funktional v.
mehreren Fkt.
 $y_1(x), \dots, y_N(x)$

Gesucht:

Vergleichsfkt:

Extremalbedingung:

$$J = J[y_1, \dots, y_N] = \int_{x_1}^{x_2} F(y_1, \dots, y_N; y'_1, \dots, y'_N; x) \quad (1) \quad \boxed{L64}$$

$$\text{Randbedingung: } y_i(x_1) = y_{i1}, \quad y_i(x_2) = y_{i2} \quad i=1, \dots, N \quad (2)$$

N Funktionen $y_i(x)$, für die $J[y_1, \dots, y_N]$ extremal ist.

$$y_i(x) + \varepsilon_i \eta_i(x) \quad (\text{unabhängige Variationsparameter})$$

$$J[y_i + \varepsilon_i \eta_i] \text{ sei minimal bei } \varepsilon_i = 0$$

$$\left. \frac{dJ[y_i + \varepsilon_i \eta_i]}{d\varepsilon_i} \right|_{\varepsilon_i=0} = 0 \quad \forall i=1, \dots, N \quad (3)$$

(denn ε_i sind alle unabhängig)

N mal dasselbe wie
vorhin: $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F(y_1, \dots, y_N; y'_1, \dots, y'_N; x)}{\partial y'_i} = \frac{\partial F(\quad)}{\partial y_i} \quad \forall i=1, \dots, N \quad (4)$$

Weitere

Verallgemeinerung:

(zur Kenntnisnahme)

Funktional:

Randbedingungen:

Gesucht:

Vergleichsfunktion:

mit Ableitungen:

$$N \text{ Fkt. } y_i(x_\nu) := y_i(x_1, \dots, x_R), \quad \forall i=1, \dots, N \quad \boxed{L65}$$

$$\text{jeweils als Fkt. v. } R \text{ Variablen, } x_\nu, \quad \nu=1, \dots, R \quad (1)$$

$$J[y_i] := J[y_1, \dots, y_N] = \int_{B \subset \mathbb{R}^R} dx_1 \dots dx_R F(y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_\nu}, x_\nu) \quad (2)$$

$i=1, \dots, N \Rightarrow \partial_\nu y_i$
 $\nu=1, \dots, R$

Alle $y_i(x_\nu)$ seien auf Rand von B fest vorgegeben

Funktionen $y_i(x_\nu)$, für die $J[y_i]$ extremal ist

$$y_i(x_1, \dots, x_R) + \varepsilon_i \eta_i(x_1, \dots, x_R) \quad (3)$$

$\partial_\nu y_i + \varepsilon_i \partial_\nu \eta_i$

unabhängige
Variationsfunktionen,
jeweils abhängig v.
 R Parametern x_ν

Extremalbedingungen
[wie (6.4)]

$$0 = \left. \frac{dJ[y_i + \varepsilon_i \eta_i]}{d\varepsilon_i} \right|_{\varepsilon_i=0}$$

(1) L66

ε_i sind alle
unabhängig:

$$0 = \int_B dx_1 \dots dx_N \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_i} \eta_i + \sum_{\nu=1}^R \frac{\partial F}{\partial (\partial_\nu y_i)} \partial_\nu \eta_i \right\} \quad \forall i=1, \dots, N \quad (2)$$

Verallgem. von $\frac{\partial F}{\partial y_i} \eta_i$

partielle Integration

η_i beliebig: $\Rightarrow$

$$0 = \int_B dx_1 \dots dx_N \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_i} \left\{ - \sum_{\nu=1}^R \left(\frac{d}{dx_\nu} \frac{\partial F}{\partial (\partial_\nu y_i)} \right) \right\} \eta_i + \text{Randterme} \right\} \quad \forall i=1, \dots, N \quad (3)$$

N-EL-Gleichungen:

$$\sum_{\nu=1}^R \frac{d}{dx_\nu} \frac{\partial F}{\partial (\partial_\nu y_i)} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \forall i=1, \dots, N \quad (4)$$

Weitere mögliche
Verallg.:

- (i) Höhere Ableitungen, z.B. $F(y, y', y'', y''')$..
- (ii) keine Randbedingungen vorgeben ...
- (iii) Variation mit Nebenbedingungen ...

Hamiltonsches Prinzip der kleinsten (extremalen) Wirkung

L67

Def: "Wirkung"

$$S = S[q] := \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(q, \dot{q}, t) \quad (\text{Fließbach, 14})$$

(1)

Das Funktional $S[q]$ wird die
"Wirkung" der Bahnkurve $q(t)$ genannt.

$(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f)$ geschw.
 $(q_1, \dots, q_f)$ Koordinaten

"action": Einheiten: Energie $\times$ Sekunde

Hamiltonsche Prinzip (HP):

Dynamische Evolution $q(t)$ des Systems zwischen
 $q(t_1) = q_1$ und $q(t_2) = q_2$ erfolgt so, dass die

Wirkung extremal wird, $\delta S[q] = 0$ (2)

unter Variation der Bahnkurve $q(t)$,

mit Randbedingung $\delta q(t_1) = 0, \delta q(t_2) = 0$ (2)

Beweis:

L68

Identifiziere: $F \leftrightarrow L$, $y_i \leftrightarrow q_i$, $x \leftrightarrow t$ (1)
 $y'_i \leftrightarrow \dot{q}_i$

ELg (64.4):

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i}$$

$$\delta S[q] = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \forall i=1, \dots, f$$

(2)

ELg für Hamiltonsches Prinzip liefern Lg2!!

f Diff-gl. 2. Ordnung $\Rightarrow 2f$ Integrationskonst.

entweder: $q_1, \dots, q_f$ und $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f$, bei $t = t_1$

oder: $q_1, \dots, q_f$ bei $t = t_1$ und $t = t_2$

Quantenmechanik à la Feynman

L69

Freies Teilchen: $S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) dt$

Klassisch:

Weg ist bestimmt durch: $\delta S = 0 \Rightarrow m \ddot{x} = 0 \Rightarrow x = vt + x_0$

Quantenmechanisch:

Wahrscheinlichkeit, von P_1 nach P_2 in Zeit $t = t_2 - t_1$ zu gelangen, ist:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \left| \sum_{\text{alle Wege zwischen } 1 \rightarrow 2} e^{i S[q] / \hbar} \right|^2$$

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ = Planck'sche Konstante

Für die meisten Wege mitteln sich die Phasen weg.

Ausser für die Wege für die $\delta S = 0$.

Bündel um den klassischen Weg

$\Rightarrow$ Hamiltonsches Prinzip !!

