Zusammenfassung: Variationsprinzipien

Allgemeine Problemstellung

Welche Funktion $y(x)$ macht das Funktional

$$J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y(x), y'(x), x) \qquad (1)$$

extremal, unter Randbedingungen $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ (2)

Antwort:

„Euler-Lagrange-Gl. (ELG) der Variationsrechnung":

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y}} \qquad (3)$$

Def: „Wirkung"

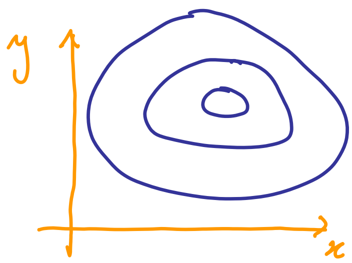
$$S = S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \qquad (4)$$

Hamiltonsches Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung): Bewegung verläuft so, dass $\delta S[q] = 0$

$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i}$:

$$\boxed{\delta S[q] = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad \forall\, i = 1, \ldots, f} \qquad (5)$$

Variation mit Nebenbedingungen (Fließbach, Kap. 13)



Lagrange-Multiplikatoren

Fragestellung: Welcher Punkt $P = (x_P, y_P)$ minimiert $f(x, y)$, unter der Nebenbedingung (NB) ? (1)

Ohne NB wäre Antwort: $\begin{cases} 2 \text{ Gl. für} \\ 2 \text{ Unbekannte} \end{cases}$ (2)

Aber: NB verknüpft x, y $\Rightarrow$ unabhängige Variation v. x, y erlaubt

Fragestellung: Minimiere $f(x,y)$, mit NB $g(x,y)=0$

Lösungsweg 1:

Eliminiere y aus $g(x,y) = 0$ (0)

d.h., finde y als Fkt. v. x: $y =$ (1)

(1) in f: $f = f(x, y \quad)$ (2)

[Berücksichtigt NB!]

Minimiere $\tilde{f}(x)$:

Kettenregel

$$\boxed{0 = \frac{d}{dx}\tilde{f} =} \qquad (3)$$

Finde (x_P, y_P):

(3) gelöst liefert , (4)

(4) eingesetzt in (1) liefert (5)

Beispiel: Finde Minimum v. **70c**

$f(x,y) =$

mit NB: $g(x,y) =$ (0)'

$y =$ (1)'

$f = x^2 + y^2$ (*)

$=$ (2)'

$0 = \frac{d}{dx}\tilde{f} =$ (3)'

$=$

$x_P =$ (4)'

$y_P(x) = 2x - 1$ (5)'

Lösungsweg 2: **70d**

Ignoriere zunächst die NB und deren Verknüpfung von x, y, und minimiere die erweiterte Funktion,

$$\boxed{f^*(x,y,\lambda) :=}$$

Nebenbedingung

"Lagrange-Multiplikator"

nach x, y, λ.

$\Longrightarrow$ unabhängige Variationsparameter:

Variation nach λ generiert dann die NB per Konstruktion (aber erst "hinterher").

70e

$f^*(x,y,\lambda) :=$ (1)

"Lagrange-Multiplikator"

Extremalbedingungen:

$0 = \partial_x f^* \overset{(1)}{=}$ (2)

$0 = \partial_y f^* \overset{(1)}{=}$ (3)

$0 = \partial_\lambda f^* \overset{(1)}{=}$ (4)

Eliminiere λ:

$\lambda \overset{(3)}{=}$ (5)

(5) in (2)

$0 = \partial_x f - \quad (\partial_x g)$ (6)

$=$ Funktion v. x, y

(4) und (6) nach lösen!

Beispiel:

$f^*(x,y) =$ (1)'

$0 = \partial_x f^* \overset{(1)}{=}$ (2)'

$0 = \partial_y f^* \overset{(1)}{=}$ (3)'

$0 = \partial_\lambda f^* \overset{(1)}{=}$ (4)'

$\boxed{\text{NB wird automatisch generiert!}}$

$\lambda \overset{(3)'}{=}$ (5)'

(5)' in (2)'

$0 =$ (6)'

(4)' in (6)' (7)'

$0 =$

$x \overset{(7)'}{=} \quad , \quad y \overset{(6')}{=}$ (8)'

70e

Satz: Lösungsweg ist äquivalent zu Lösungsweg :

Beweis: Schreibe NB $g(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = y_g(x)$ (1)

in folgende Form: (2)

Wende nun Lösungsweg 2 an auf Minimierung v. , mit NB :

(70e.6) : $0 = \partial_x f - (\partial_y f)(\partial_x g) / (\partial_y g)$ (3)

(3) enthält: $\partial_y \tilde{g} \overset{(2)}{=} \quad , \quad \partial_x \tilde{g} \overset{(2)}{=}$ (4)

(4) in (3): $0 = \partial_x f - (\partial_y f)$ (5)

In einsetzen: $\overset{(5)}{=} \partial_x f(x,y) - \partial_y f(x,y)\left(-\partial_x y_g(x)\right)$ (6)

$=$ $\quad = $ Ergebnis v. Lösungsweg $\square$

Verallgemeinerung 1: Funktion mehrerer Variablen

L7.1a

Fragestellung: $f(x_1, \dots, x_N)$ sei minimal, mit $g_\alpha(x_1, \dots, x_N) = 0$ (1)

NB an alle x_i für jedes α

$\alpha = 1, \dots, R$

Lösungsweg: $\boxed{\text{Minimiere} \qquad \text{nach } x_1, \dots, x_N, \lambda_1, \dots R}$ (2)

"Lagrange-Multiplikator (LM)"

Extremalbedingungen: $0 = \partial_{x_i} f^* =$ (3)

$0 = \partial_{\lambda_\alpha} f^* =$ (4)

Kernidee v. LM: Gebe NB zunächst auf während Minimierung, aber wähle Funktion f^* so, dass die NB generiert.

Verallgemeinerung 2: Funktional mit "isoperimetrischer" NB

L7.1b

Fragestellung: $J[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y_i, y_i'; x)$ sei extremal, (1)

legt einen Parameter fest

mit NB $K_\alpha[y_i] =$ (2)

Lösungsweg: finde Extrema von:

$J^* = J + \sum \lambda_\alpha K_\alpha$

$J^*[y_i, \quad] = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[F(y_i, y_i'; x) + \quad g_\alpha(y_i, y_i', x) \right]$ (3)

Variation bezüglich y_i: ELG (6.1.6)

$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_i'} = \frac{\partial F}{\partial y_i}$

$\frac{d}{dx} \frac{\partial (F \qquad)}{\partial y_i'} = \frac{\partial (F \qquad)}{\partial y_i} \quad \forall\, i = 1, \dots, N$ (5)

Variation bezüglich λ_α: $0 = \frac{\partial J^*}{\partial \lambda_\alpha} =$ (4)

reproduziert NB (2)

$\sum_\alpha \lambda_\alpha \int dx\, g_\alpha$

(4) und (5) sind gemeinsam zu lösen!!

Verallgemeinerung 3: Funktional: Extrema mit Holonomen NB

L72

Gesch.w. kommt nicht vor

Fragestellung: $J[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y_i, y_i', x)$ sei extremal, (1)

z.B.: $g(y_1, y_2, x)$ legt eine Funktion fest

$=$ mit holonomer NB: (2)

NB an alle y_i für jedes x

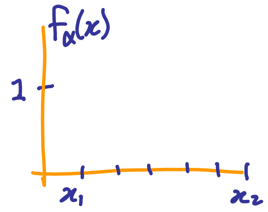
schärfere NB als (716.2)

Zurückführung auf isoperimetrische NB: Teile $[x_1, x_2]$ auf in M Intervalle der Länge d

Schreibe (2) als $K_\alpha[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, g(y_i, x)$ (3)

$\Downarrow$

Check:
$\lim_{M\to\infty} (3) =$ $\int dx\, g(y_i, x) = 0$ (4)



(4) gelte $\forall\, \alpha$,
und im Limes $d \to 0$ $\Rightarrow$

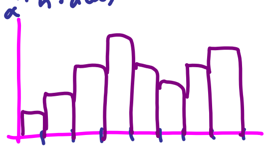
Verallgemeinertes Funktional:

L73

$J^* \overset{(716.3)}{=}$ (1)

Extremalbedingungen: $0 = \frac{\partial J^*}{\partial \lambda_\alpha} =$ (2) [reproduziert , also auch] (2)

Im Limes $M \to \infty$ $J^* = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[F(y_i, y_i', x) - g(y_i, x) \sum_\alpha \lambda_\alpha f_\alpha(x) \right]$ (3)



$= \int_{x_1}^{x_2} dx\, F^*(y_i, y_i', x)$ (4)

diskreter Index $\alpha \to$
Kontinuierlichen Index x.

$F^*(y_i, y_i', x) =$ (5)

Euler-Lagrange für F^*:

$\frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y_i'} = \frac{\partial F^*}{\partial y_i}$ (6)

Hamiltonprinzip für System mit holonomen NB liefert LG!

74

Betrachte $$L(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2}\sum_n m_n \dot{x}_n^2 - U(x,t) \qquad (1)$$

mit Zwangsbedingungen : $$g_\beta(x,t) = 0 \qquad (2)$$

also: Koordinaten x_i sind nicht unabhängig, also keine guten Verallg. Koordinaten

Wirkung : $$S[x] = \qquad (3)$$

HP besagt: Dynamische Evolution so, daß , wobei

(4)

$\Rightarrow$ Variationsproblem mit holonomen NB !

Erweiterte Lagrange-Funktion : $$L^*(x,\dot{x},t) = L(x,\dot{x},t) \qquad (1)$$

75

EL(73.6) : $F \rightarrow$, $x -$, $y_i(x) \rightarrow$ (2)

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = \frac{\partial F}{\partial y_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y_i} \qquad = \qquad (3)$$

$$L \overset{(74.1)}{=} \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 - U(x) \qquad \overset{(3)}{=} \qquad (4)$$

Fazit : (5)

Bemerkungen zu HP

- Elegante, kompakte Formulierung der dyn. Evolution in einer einzigen Gl.
- Hilft jedoch nicht für praktische Lösungen : ELG muss sowieso gelöst werden
- L ist sehr einfach zu bestimmen
- $\sum_\beta \lambda_\beta \frac{\partial g_\beta}{\partial x_n}$ beschreibt Zwangskräfte