Zusammenfassung: Variationsprinzipien

V15 – 03.06.07

70a

Allgemeine Problemstellung

Welche Funktion $y(x)$ macht das Funktional

$$J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \; F(y(x), y'(x), x) \qquad (1)$$

extremal, unter Randbedingungen $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ (2)

Antwort:

"Euler-Lagrange-Gl. (ELG) der Variationsrechnung":

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y, y', x)}{\partial y}} \qquad (3)$$

Def: "Wirkung"

$$S = S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \; L(q, \dot{q}, t) \qquad (4)$$

Hamiltonsches Prinzip (Prinzip der "kleinsten" Wirkung): Bewegung verläuft so, dass $\delta S[q] = 0$

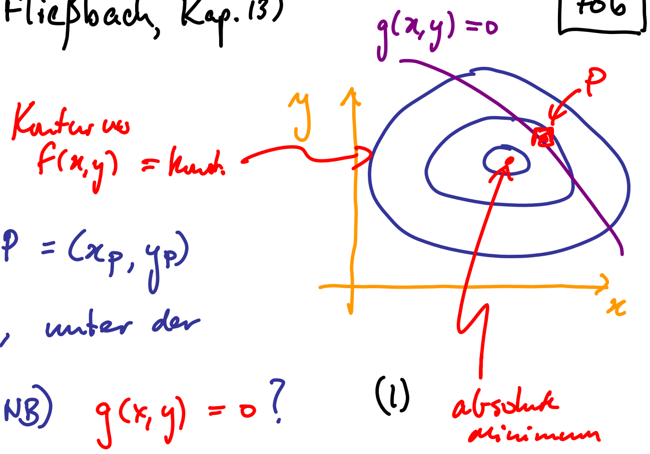
$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i}$:

$$\boxed{\delta S[q] = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \forall\, i = 1, \dots, f} \qquad (5)$$

Variation mit Nebenbedingungen

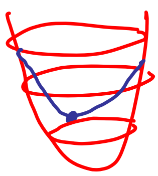
(Fließbach, Kap. 13)

70b



Lagrange-Multiplikatoren

Fragestellung:



Welcher Punkt $P = (x_P, y_P)$ minimiert $f(x,y)$, unter der Nebenbedingung (NB) $g(x,y) = 0$? (1)

Ohne NB wäre Antwort:

$\partial_x f = 0$, $\partial_y f = 0$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ Gl. für} \\ 2 \text{ Unbekannte } (x_P, y_P) \end{array} \right.$ (2)

Aber:

NB verknüpft x, y $\Rightarrow$ unabhängige Variation v. x, y nicht erlaubt

Fragestellung: Minimiere $f(x,y)$, mit NB $g(x,y)=0$

Lösungsweg 1:

Eliminiere y aus $g(x,y)=0$ (0)

d.h., finde y als Fkt. v. x: $y = y_g(x)$ (1)

(1) in f: $f = f(x, y_g(x)) =: \tilde{f}(x)$ (2)

[Berücksichtigt NB!]

Minimiere $\tilde{f}(x)$:

Kettenregel

$$\boxed{0 = \frac{d}{dx}\tilde{f} = \Big[\underset{①}{\partial_x f(x,y)} + \underset{2a}{\partial_y f(x,y)}\ \underset{2b}{\partial_x y_g(x)}\Big]_{y=y_g(x)}} \quad (3)$$

Finde (x_p, y_p):

(3) gelöst liefert x_p, (4)

(4) eingesetzt in (1) liefert $y_p = y_g(x_p)$ (5)

Beispiel: Finde Extremum v. $f(x,y) = -3x^2 + y^2$

70c

mit NB: $g(x,y) = 2x - y - 1 = 0$ (0)'

$y = 2x - 1 =: y_g(x)$ (1)'

$f = -3x^2 + y_g^2(x) = -3x^2 + (2x-1)^2$ (*)

$= x^2 - 4x + 1 =: \tilde{f}(x)$ (2)'

$$0 = \underbrace{\frac{d}{dx}\tilde{f}}_{\frac{d}{dx}(\ast)} = \underset{①}{-6x} + \underbrace{2(2x-1)}_{2a}\cdot\underbrace{2}_{2b} \quad (3)'$$

$= 2x - 4 \quad \left[= \frac{d}{dx}(2)'\right]$

$x_p = \frac{4}{2} = 2$ (4)'

$y_p(x_p) = 2x_p - 1 = 2\cdot 2 - 1 = 3$ (5)'

Lösungsweg 2:

70d

Ignoriere zunächst die NB und deren Verknüpfung von x, y, und "minimiere" die erweiterte Funktion, (Finde Extremum)

$$\boxed{f^*(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda\, g(x,y)}$$

Nebenbedingung

"Lagrange-Multiplikator"

nach x, y, λ.

$\Longrightarrow$ 3 unabhängige Variationsparameter: x, y, λ

Variation nach λ generiert dann die NB per Konstruktion (aber erst "hinterher").

$$\frac{\partial f^*}{\partial \lambda} = 0 \quad \Longrightarrow \quad g(x,y) = 0$$

$\boxed{70e}$

$$f^*(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda\, g(x,y) \qquad (1)$$

"Lagrange-Multiplikator"

Extremalbedingungen:

$$0 = \partial_x f^* \overset{(1)}{=} \partial_x f + \lambda\, \partial_x g \qquad (2)$$

$$0 = \partial_y f^* \overset{(1)}{=} \partial_y f + \lambda\, \partial_y g \qquad (3)$$

$$0 = \partial_\lambda f^* \overset{(1)}{=} g(x,y) \qquad (4)$$

$\boxed{\text{NB wird automatisch generiert !}}$

Eliminiere λ :

$$\lambda \overset{(3)}{=} -(\partial_y f)/(\partial_y g) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big/\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) \qquad (5)$$

(5) in (2)

$$0 = \partial_x f - (\partial_y f)(\partial_x g)/(\partial_y g) \qquad (6)$$

= Funktion v. x,y

(4) und (6) nach x, y lösen !

Beispiel:

$$f^*(x,y) = (-3x^2+y^2) + \lambda(2x-y-1) \qquad (1)'$$

$$0 = \partial_x f^* \overset{(1)}{=} -6x + 2\lambda \qquad (2)'$$

$$0 = \partial_y f^* \overset{(1)}{=} 2y - \lambda \qquad (3)'$$

$$0 = \partial_\lambda f^* \overset{(1)}{=} 2x-y-1 \qquad (4)'$$

$$\lambda \overset{(3)'}{=} 2y \qquad (5)'$$

(5)' in (2)'

$$0 = -6x + 2(2y) \qquad (6)'$$

(4)' in (6)'

$$0 = -6x + 2\cdot 2(2x-1) = 2x-4 \qquad (7)'$$

$$x \overset{(7)'}{=} 2 \quad , \quad y \overset{(6')}{=} 3 \qquad (8)'$$

$\boxed{70e}$

Satz: Lösungsweg 2 ist äquivalent zu Lösungsweg 1 :

Beweis: Schreibe NB $g(x,y) = 0 \Rightarrow y = y_g(x)$ so gewählt, dass $g(x, y_g(x)) = 0 \ \forall x.$ (1)

in folgende Form:

$$\tilde{g}(x,y) =: y - y_g(x) = 0 \qquad (2)$$

Wende nun Lösungsweg 2 an auf "Minimierung" v. $f(x,y)$, mit NB $\tilde{g}(x,y)$:

$$(70e.6): \quad 0 = \partial_x f - (\partial_y f)(\partial_x \tilde{g})/(\partial_y \tilde{g}) \qquad (3)$$

(3) enthält:

$$\partial_y \tilde{g} \overset{(2)}{=} 1 \ , \quad \partial_x \tilde{g} \overset{(2)}{=} -\partial_x y_g(x) \qquad (4)$$

(4) in (3) :

$$0 = \partial_x f - (\partial_y f)\left[-\partial_x y_g(x)\right]/1 \qquad (5)$$

(2) In (5) einsetzen:

$$\overset{(5)}{=} \Big[\partial_x f(x,y) - \partial_y f(x,y)\left(-\partial_x y_g(x)\right)\Big]_{y=y_g(x)} \qquad (6)$$

$$= (70c.3) = \text{Ergebnis v. Lösungsweg } 1 \qquad \square$$

Verallgemeinerung 1: Funktion mehrerer Variablen

L71a

Fragestellung: $\underbrace{f(x_1,\dots,x_N)}_{x}$ sei "minimal", extremal, mit $g_\alpha(x_1,\dots,x_N)=0$ (1)

NB an alle x_i für jedes α $\quad$ $\alpha=1,\dots,R$

Lösungsweg: $\boxed{\text{Minimiere } f^*(x) = f(x) + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha g_\alpha(x) \text{ nach } x_1,\dots,x_N,\lambda_1,\dots,\lambda_R}$ (2)

"Lagrange-Multiplikator (LM)"

Extremalbedingungen: $0 = \partial_{x_i} f^* \overset{(2)}{=} \partial_{x_i} f(x) + \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_{x_i} g_\alpha(x) \quad \forall\, i=1,\dots,N$ (3)

$\partial_{\lambda_\alpha} \sum_{\alpha'} \lambda_{\alpha'} g_{\alpha'}(x) \qquad 0 = \partial_{\lambda_\alpha} f^* \overset{(2)}{=} g_\alpha(x) \quad \forall\, \alpha=1,\dots,R$ (4)

$\delta_{\alpha\alpha'} \quad = g_\alpha(x)$

Kernidee v. LM: Gebe NB zunächst auf während Minimierung, aber wähle Funktion f^* so, dass $\partial_{\lambda_\alpha} f^* = 0$ die NB generiert.

Verallgemeinerung 2: Funktional mit "isoperimetrischer" NB

L71b

Fragestellung: $J[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y_i, y_i'; x)$ sei extremal, (1)

$y(x) = (y_1(x),\dots,y_N(x))$

mit NB $K_\alpha[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, G_\alpha(y_i, y_i', x) = 0$ (2)

legt einen Parameter fest

$\alpha=1,\dots,R$

Lösungsweg: finde Extrema von:

$J^* = J + \sum_\alpha \lambda_\alpha K_\alpha$

$$J^*[y_i,\lambda_\alpha] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, \underbrace{\Big[F(y_i,y_i';x) + \sum_{\alpha=1}^{R} \lambda_\alpha G_\alpha(y_i,y_i',x)\Big]}_{=:\, F^*(y_i,y_i',x)} \qquad (3)$$

Variation bezüglich y_i: ELG (61.6)

$\frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial y_i'} = \frac{\partial F^*}{\partial y_i}$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial\left(F + \sum_\alpha \lambda_\alpha G_\alpha\right)}{\partial y_i'} = \frac{\partial\left(F + \sum_\alpha \lambda_\alpha G_\alpha\right)}{\partial y_i} \quad \forall\, i=1,\dots,N \qquad (4)$$

$\forall\, \alpha=1,\dots,R$

Variation bezüglich λ_α: $\quad 0 = \frac{\partial J^*}{\partial \lambda_\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx\, G_\alpha(y_i,y_i',x) \overset{(2)}{=} K_\alpha[y_i]$ (5)

reproduziert NB (2)

$\frac{\partial}{\partial \lambda_\alpha} \sum_{\alpha'} \lambda_{\alpha'} \int dx\, G_{\alpha'} = \int dx\, G_\alpha$ $\quad (\delta_{\alpha\alpha'})$

(4) und (5) sind gemeinsam zu lösen!!

Verallgemeinerung 3: Funktional: Extrema mit Holonomen NB

"Geschw." kommt nicht vor

Fragestellung: $y_1(x), \dots, y_N(x)$

$$J[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y_i, y_i', x) \quad \text{sei extremal}, \tag{1}$$

z.B.: $g(y_1, y_2, x) = y_1(x) - y_2(x) - x = 0$ mit holonomer NB:

$$g(y_i, x) = 0 \tag{2}$$

legt eine Funktion fest $\forall\, x$.

NB an alle y_i für jedes x

schärfere NB als (716.2)

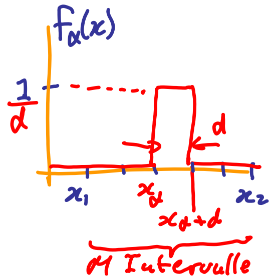
$y_1(x) = y_2(x) + x$

Zurückführung auf isoperimetrische NB: Teile $[x_1, x_2]$ auf in M Intervalle der Länge $d = \frac{x_2 - x_1}{M}$

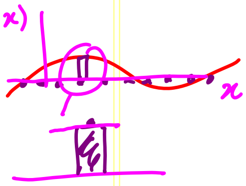
Schreibe (2) als

$$K_\alpha[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, g(y_i, x)\, f_\alpha(x) = 0 \tag{3}$$

$\forall\, \alpha = 1, \dots, M$



Check: $\lim_{M\to\infty,\, d \to 0} (3) =$



$\Downarrow$

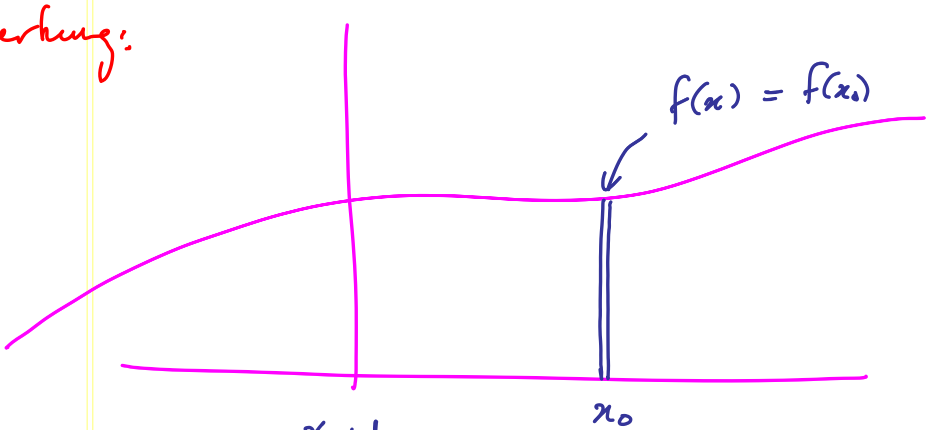
$$\frac{1}{d}\int_{x_\alpha}^{x_\alpha+d} dx\, g(y_i, x) = 0 \tag{4}$$

(4) gelte $\forall\, \alpha$, und im Limes $d \to 0$ $\Rightarrow$

$\Downarrow$

$$g(y_i, x)\big|_{x_\alpha} \cdot \underbrace{\frac{1}{d}\int_{x_\alpha}^{x_\alpha+d} dx}_{=1} = 0 \quad \forall\, \alpha$$

Nebenbemerkung:



$$\int_{x_0}^{x_0+d} dx\, f(x) \simeq f(x_0) \cdot \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+d} dx}_{d}$$

falls $d \to 0$.

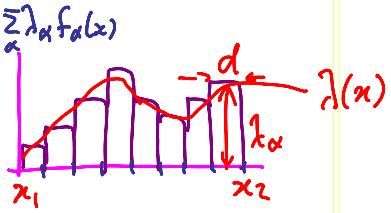
L73

Verallgemeinertes Funktional: $$J^* \overset{(7.6.3)}{=} J + \sum_{\alpha=1}^{M} \lambda_\alpha K_\alpha \qquad (1)$$

Extremalbedingungen: $$0 = \frac{\partial J^*}{\partial \lambda_\alpha} = K_\alpha \qquad (2)$$ [reproduziert (7.2.3), also auch (7.2.2)] $\forall\, \alpha = 1, \dots, M$

Im Limes $M \to \infty$: $$J^* = \int_{x_1}^{x_2} dx \Big[F(y_i, y_i', x) + g(y_i; x) \underbrace{\overbrace{\sum_\alpha \lambda_\alpha f_\alpha(x)}^{\sum_\alpha \lambda_\alpha K_\alpha}}_{\equiv \lambda(x)} \Big] \qquad (3)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx\, F^*(y_i, y_i', x) \qquad (4)$$



diskreter Index $\alpha \to$ Kontinuierlichen Index x.

$$F^*(y_i, y_i', x) = F(y_i, y_i', x) + \lambda(x)\, g(y_i, x) \qquad (5)$$

Euler-Lagrange für F^*: $$\frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y_i'} = \frac{\partial F^*}{\partial y_i}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial F(y_i, y_i', x)}{\partial y_i'} = \frac{\partial F}{\partial y_i} + \lambda(x) \frac{\partial g(y_i; x)}{\partial y_i}} \qquad (6)$$

L74

Hamiltonprinzip für System mit holonomen NB liefert LG!

Betrachte (Cartesisch) $$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_n m_n \dot{x}_n^2 - U(x, t) \qquad (1)$$

mit Zwangsbedingungen: $$g_\beta(x, t) = 0 \qquad \beta = 1, \dots, R \qquad (2)$$

also: Koordinaten x_i sind nicht unabhängig, also keine guten Verallg. Koordinaten

Wirkung: $$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(x, \dot{x}, t) \qquad (3)$$

(Erweiterte) HP besagt: $$\boxed{\text{Dynamische Evolution so, daß } \delta S = 0, \text{ wobei } g_\beta = 0} \qquad (4)$$

$F \to L$
$y_i(x) \to x_n(t)$
$x \to t$ $\Rightarrow$ Variationsproblem mit holonomen NB!

Erweiterte Lagrange-Funktion: $L^*(x,\dot{x},t) = L(x,\dot{x},t) + \sum_{\beta=1}^{R} \lambda_\beta(t)\, g_\beta(x,t)$ (1) $\boxed{L75}$

EL(73.6): $F \to L$, $x \to t$, $y_i(x) \to x_n(t)$ (2)

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_i'} = \frac{\partial F}{\partial y_i} + \overset{\lambda(x)}{\lambda}\frac{\partial g}{\partial y_i} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} = \frac{\partial L}{\partial x_n} + \sum_{\beta=1}^{R}\lambda_\beta(t)\frac{\partial g_\beta(x,t)}{\partial x_n} \quad (3)$$

$$L \overset{(74.1)}{=} \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 - U(x) \qquad m\,\ddot{x}_n \overset{(3)}{=} -\frac{\partial U}{\partial x_n} + \sum_\beta \lambda_\beta(t)\underbrace{\frac{\partial g_\beta}{\partial x_n}}_{z_\beta^{(n)}} = LG1 \;!!! \quad (4)$$

Fazit: $\delta S^* \Longleftrightarrow LG1$ (5)

Bemerkungen zu HP

- Elegante, kompakte Formulierung der dyn. Evolution in einer einzigen Gl.
- Hilft jedoch nicht für praktische Lösungen: ELG muss sowieso gelöst werden
- L ist sehr einfach zu bestimmen
- $\sum_\beta \lambda_\beta \frac{\partial g_\beta}{\partial x_n}$ beschreibt Zwangskräfte