Zusammenfassung: Variationsprinzipien V15 – 03.06.07 70a

Allgemeine Problemstellung

Welche Funktion $y(x)$ macht das Funktional

$$J = J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx\; F(y(x), y'(x), x) \qquad (1)$$

Antwort: extremal, unter Randbedingungen $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ (2)

"Euler-Lagrange-Gl. (ELG) der Variationsrechnung":

$$\boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y'} = \frac{\partial F(y,y',x)}{\partial y}} \qquad (3)$$

Def: "Wirkung"

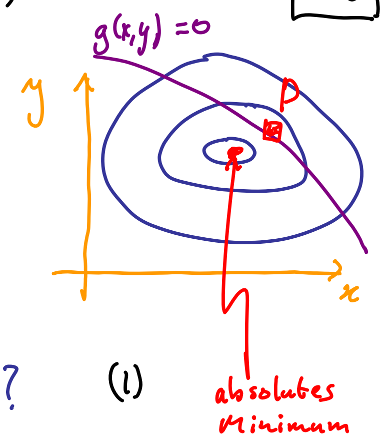
$$S = S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt\; \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \qquad (4)$$

Hamiltonsches Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung): Bewegung verläuft so, dass $\delta S[q] = 0$

$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i}$:

$$\boxed{\delta S[q] = 0 \iff \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad \forall\, i = 1, \dots, f} \qquad (5)$$

Variation mit Nebenbedingungen (Fließbach, Kap. 13) 70b



Lagrange-Multiplikatoren

Fragestellung: Welcher Punkt $P = (x_P, y_P)$ minimiert $f(x,y)$, unter der Nebenbedingung (NB) $g(x,y) = 0$? (1)

Ohne NB wäre Antwort:

$$\partial_x f = 0, \qquad \partial_y f = 0 \qquad \begin{cases} 2 \text{ Gl. für} \\ 2 \text{ Unbekannte} \end{cases} \checkmark \qquad (2)$$

Aber: NB verknüpft x, y $\Rightarrow$ unabhängige Variation v. x, y nicht erlaubt

Fragestellung: Minimiere $f(x,y)$, mit NB $g(x,y)=0$

Lösungsweg 1:

Eliminiere y aus $g(x,y)=0$ (0)

d.h., finde y als Fkt. v. x: $y = y_g(x)$ (1)

(1) in f: $f = f(x, y_g(x)) =: \tilde{f}(x)$ (2)

[Berücksichtigt NB!]

Minimiere $\tilde{f}(x)$:

Kettenregel

$$\boxed{0 = \frac{d}{dx}\tilde{f} = \Big[\partial_x f(x,y) + \partial_y f(x,y)\, \partial_x y_g(x)\Big]_{y=y_g(x)}} \quad (3)$$

(1), (2a), (2b)

Finde (x_p, y_p):

(3) gelöst liefert x_p, (4)

(4) eingesetzt in (1) liefert $y_p = y_g(x_p)$, (5)

70c

Beispiel: Finde Minimum v.

$f(x,y) = -3x^2 + y^2$

mit NB: $g(x,y) = 2x - y - 1 = 0$ (0)'

$y = 2x - 1 =: y_g(x)$ (1)'

$f = x^2 + y_g^2(x) = -3x^2 + (2x-1)^2$ (*)

$= x^2 - 4x + 1 =: \tilde{f}(x)$ (2)'

$\frac{d}{dx}$(*)

(1), (2a), (2b)

$0 = \frac{d}{dx}\tilde{f} = -6x + 2(2x-1)\cdot 2$ (3)'

$= 2x - 4 \quad \left[= \frac{d}{dx}(2')\right]$ ✓

$x_p = \frac{4}{2} = 2$ (4)'

$y_p(x_p) = 2x_p - 1 = 2\cdot 2 - 1 = 3$ (5)'

Lösungsweg 2:

70d

Ignoriere zunächst die NB und deren Verknüpfung von x, y, und minimiere die erweiterte Funktion,

$$\boxed{f^*(x,y,\lambda) := f(x,y) - \lambda\, g(x,y)}$$

Nebenbedingung

"Lagrange-Multiplikator"

nach x, y, λ.

$\Longrightarrow$ 3 unabhängige Variationsparameter: x, y, λ

Variation nach λ generiert dann die NB per Konstruktion (aber erst "hinterher").

70e

$$f^*(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda\, g(x,y) \quad (1)$$

"Lagrange-Multiplikator"

Extremalbedingungen:

$$0 = \partial_x f^* \overset{(1)}{=} \partial_x f + \lambda \partial_x g \quad (2)$$

$$0 = \partial_y f^* \overset{(1)}{=} \partial_y f + \lambda \partial_y g \quad (3)$$

$$0 = \partial_\lambda f^* \overset{(1)}{=} g(x,y) \quad (4)$$

Eliminiere λ:

$$\lambda \overset{(3)}{=} (\partial_y f)/(\partial_y g) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big/\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) \quad (5)$$

(5) in (2)

$$0 = \partial_x f - (\partial_y f)(\partial_x g)/(\partial_y g) \quad (6)$$

= Funktion v. x,y

(4) und (6) nach x, y lösen!

Beispiel:

$$f^*(x,y) = (-3x^2+y^2) + \lambda(2x-y-1) \quad (1)'$$

$$0 = \partial_x f^* \overset{(1)}{=} -6x + 2\lambda \quad (2)'$$

$$0 = \partial_y f^* \overset{(1)}{=} 2y - \lambda \quad (3)'$$

$$0 = \partial_\lambda f^* \overset{(1)}{=} 2x - y - 1 \quad (4)'$$

NB wird automatisch generiert!

$$\lambda \overset{(3)'}{=} 2y \quad (5)'$$

(5)' in (2)'

$$0 = -6x + 2(2y) \quad (6)'$$

(4)' in (6)' (7)'

$$0 = -6x + 2\cdot 2(2x-1) = 2x-4$$

$$x \overset{(7)'}{=} 2, \quad y \overset{(6')}{=} 3 \quad (8)'$$

70e

Satz: Lösungsweg 2 ist äquivalent zu Lösungsweg 1:

Beweis: Schreibe NB $g(x,y) = 0 \Rightarrow y = y_g(x)$ (1)

in folgende Form: $\tilde{g}(x,y) =: y - y_g(x) = 0$ (2)

Wende nun Lösungsweg 2 an auf Minimierung v. $f(x,y)$, mit NB $\tilde{g}(x,y)$:

(70e.6): $$0 = \partial_x f - (\partial_y f)(\partial_x \tilde{g})/(\partial_y \tilde{g}) \quad (3)$$

(3) enthält: $$\partial_y \tilde{g} \overset{(2)}{=} 1, \quad \partial_x \tilde{g} \overset{(2)}{=} -\partial_x y_g(x) \quad (4)$$

(4) in (3): $$0 = \partial_x f - (\partial_y f)[-\partial_x y_g(x)]/1 \quad (5)$$

(2) in (6) einsetzen: $$\overset{(5)}{=} \Big[\partial_x f(x,y) - \partial_y f(x,y)(-\partial_x y_g(x))\Big]_{y=y_g(x)} \quad (6)$$

$$= (70c.3) \;!! \;= \text{Ergebnis v. Lösungsweg 1.} \quad \square$$

Verallgemeinerung 1: Funktion mehrerer Variablen

L71a

Fragestellung: $\underbrace{f(x_1,\dots,x_N)}_{x}$ sei minimal, mit $g_\alpha(x_1,\dots,x_N)=0$ (1)

NB an alle x_i für jedes α

$\alpha = 1,\dots,R$

Lösungsweg: $\boxed{\text{Minimiere } f^*(x) = f(x) + \sum_\alpha \lambda_\alpha g_\alpha(x) \text{ nach } x_1,\dots,x_N, \lambda_1,\dots,_R}$ (2)

"Lagrange-Multiplikator (LM)"

Extremalbedingungen: $0 = \partial_{x_i} f^* = \partial_{x_i} f(x) + \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial_{x_i} g_\alpha(x)$ (3)

$0 = \partial_{\lambda_\alpha} f^* = g_\alpha(x)$ (4)

Kernidee v. LM: Gebe NB zunächst auf während Minimierung, aber wähle Funktion f^* so, dass $\partial_{\lambda_\alpha} f^* = 0$ die NB generiert.

Verallgemeinerung 2: Funktional mit "isoperimetrischer" NB

L71b

Fragestellung:

$y(x) = (y_1(x),\dots,y_N(x))$

$J[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y_i, y_i'; x)$ sei extremal, (1)

legt einen Parameter fest

mit NB $K_\alpha[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, G_\alpha(y_i, y_i'; x) = 0$ (2)

$\alpha = 1,\dots,R$

Lösungsweg: finde Extrema von:

$J^* = J + \sum \lambda_\alpha K_\alpha$

$J^*[y_i,\lambda_\alpha] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, \underbrace{\left[F(y_i,y_i';x) + \sum_\alpha \lambda_\alpha G_\alpha(y_i,y_i',x)\right]}_{=:\, F^*(y_i,y_i',\lambda_\alpha)}$ (3)

Variation bezüglich y_i: ELG (61.6)

$\frac{d}{dx}\frac{\partial F^*}{\partial y_i'} = \frac{\partial F^*}{\partial y_i}$:

$\frac{d}{dx}\frac{\partial\left(F - \sum_\alpha \lambda_\alpha G_\alpha\right)}{\partial y_i'} = \frac{\partial\left(F - \sum_\alpha \lambda_\alpha G_\alpha\right)}{\partial y_i}$ $\forall\, i = 1,\dots,N$ (5)

Variation bezüglich λ_α: $0 = \frac{\partial J^*}{\partial \lambda_\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} dx\, G_\alpha(y_i,y_i';x) \overset{(2)}{=} K_\alpha[y_i]$ $\forall\, \alpha = 1,\dots,R$ (4)

reproduziert NB (2)

$\frac{\partial}{\partial\lambda_\alpha} \sum_{\alpha'} \lambda_{\alpha'} \int dx\, G_{\alpha'} = \int dx\, G_\alpha(x)$, mit $\delta_{\alpha\alpha'}$

(4) und (5) sind gemeinsam zu lösen!!

Verallgemeinerung 3: Funktional: Extrema mit Holonomen NB

Gesdw. kommt nicht vor

Fragestellung:

$$J[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, F(y_i, y_i', x) \quad \text{sei extremal,} \tag{1}$$

$y_1(x_1), \dots, y_N(x)$

z.B.: $g(y_1, y_2, x)$

$= y_1(x) - y_2(x) - x = 0$

$\Rightarrow y_1(x) = y_2(x) + x$

mit holonomer NB: $\quad g(y_i, x) = 0 \quad$ (2)

legt eine Funktion fest

NB an alle y_i für jedes x

schärfere NB als (71b.2)

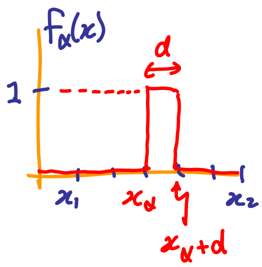
Zurückführung auf isoperimetrische NB: Teile $[x_1, x_2]$ auf in M Intervalle der Länge $d = \frac{x_2 - x_1}{M}$

Schreibe (2) als

$$K_\alpha[y_i] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, g(y_i, x)\, f_\alpha(x) = 0 \tag{3}$$

$\Downarrow$

$$\int_{x_\alpha}^{x_\alpha + d} dx\, g(y_i, x) = 0 \tag{4}$$



Check:
$\lim_{M \to \infty}$ (3) = (2):

(4) gelte $\forall \alpha$, und im Limes $d \to 0$ $\Rightarrow$

$$g(y_i, x) = 0$$

Verallgemeinertes Funktional:

$$J^* \overset{(71b.3)}{=} J - \sum_\alpha \lambda_\alpha K_\alpha \tag{1}$$

Extremalbedingungen:

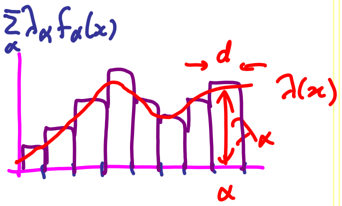
$$0 = \frac{\partial J^*}{\partial \lambda_\alpha} = -K_\alpha \tag{2}$$

[reproduziert (72.3), also auch (72.2)]

Im Limes $M \to \infty$

$$J^* = \int_{x_1}^{x_2} dx \Big[F(y_i, y_i', x) - \overbrace{g(y_i, x) \underbrace{\sum_\alpha \lambda_\alpha f_\alpha(x)}_{\equiv \lambda(x)}}^{\sum_\alpha \lambda_\alpha K_\alpha} \Big] \tag{3}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} dx\, F^*(y_i, y_i', x) \tag{4}$$



diskreter Index $\alpha \to$ kontinuierlichen Index x.

$$F^*(y_i, y_i', x) = F(y_i, y_i', x) - \lambda(x)\, g(y_i, x) \tag{5}$$

Euler-Lagrange für F^*:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y_i'} = \frac{\partial F^*}{\partial y_i}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial F(y_i, y_i', x)}{\partial y_i'} = \frac{\partial F}{\partial y_i} - \lambda(x) \frac{\partial g(y_i, x)}{\partial y_i}} \tag{6}$$

Hamiltonprinzip für System mit holonomen NB liefert LG I

Betrachte $L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} \sum_n m_n \dot{x}_n^2 - U(x,t)$ (1)

$x = (x_1, \dots, x_N)$

mit Zwangsbedingungen : $g_\beta(x,t) = 0 \quad \beta = 1, \dots, f$ (2)

also: Koordinaten x_i sind nicht unabhängig, also keine guten Verallg. Koordinaten

Wirkung : $S[x] = \int_{t_1}^{t_2} dt \, L(x, \dot{x}, t)$ (3)

HP besagt: Dynamische Evolution so, daß $\delta S = 0$, wobei $g_\beta = 0$ (4)

$F \to L$

$y_i(x) \to x_n(t)$

$x \to t$

$\Rightarrow$ Variationsproblem mit holonomen NB !

Erweiterte Lagrange-Funktion: $L^*(x, \dot{x}, t) = L(x, \dot{x}, t) - \sum_\beta \lambda_\beta(t) \, g_\beta(x,t)$ (1)

EL(73.6) : $F \to L \; , \; x \to t \; , \; y_i(x) \to x_n(t)$ (2)

$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_i'} = \frac{\partial F}{\partial y_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y_i}$ $\qquad$ $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} = \frac{\partial L}{\partial x_n} - \sum_\beta \lambda_\beta(t) \frac{\partial g_\beta}{\partial x_n}$ (3)

$L \overset{(74.1)}{=} \frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 - U(x)$ $\qquad$ $m_n \ddot{x}_n \overset{(3)}{=} - \frac{\partial U}{\partial x_n} - \sum_\beta \lambda_\beta(t) \frac{\partial g_\beta}{\partial x_n} = \text{LG I !!}$ (4)

Fazit: $\delta S^* = 0 \iff$ LG 1 ☺ (5)

Bemerkungen zu HP

- Elegante, kompakte Formulierung der dyn. Evolution in einer einzigen Gl.
- Hilft jedoch nicht für praktische Lösungen : ELG muss sowieso gelöst werden
- L ist sehr einfach zu bestimmen
- $\sum_\beta \lambda_\beta \frac{\partial g_\beta}{\partial x_n}$ beschreibt Zwangskräfte