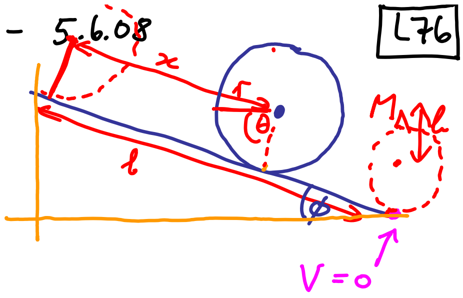
Beispiel: Rollender Reifen mit r

V16 – 5.6.08

$\boxed{L76}$



Kinetische Energie $\quad T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\overbrace{I}^{\frac{1}{2}Mr^2}\dot{\theta}^2 \quad (1)$

Potenzielle Energie: $\quad V = Mg\overbrace{(\ell - x)\sin\phi}^{h} \quad (2)$

Zwangsbedingung: $\quad g(x,\theta) := \theta r - x = 0 \quad (3)$ konstant

[nicht-gleitendes Rollen, holonome ZB]

Erweiterte Lagrange-Fkt:
$L^* \overset{(75.1)}{=} L + \lambda g$

$$L^* \overset{(75.1)}{=} T - V + \lambda(\theta r - x) \quad (4)$$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L^*}{\partial x}$: $\quad M\ddot{x} = Mg\sin\phi - \lambda \quad (5)$

Interpretation: Reibungskraft

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L^*}{\partial \theta}$: $\quad \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Mr^2\dot{\theta}\right)}_{\frac{1}{2}Mr^{\cancel{2}}\ddot{\theta}} = \lambda\cancel{r} \quad (6)$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{\partial L^*}{\partial \lambda}$: $\quad 0 = \theta r - x \quad (7)$

---

(5) – (7) sind zu lösen. Eliminiere zunächst $\ddot{\theta}$ zwischen (76.6) und (76.7):

$\boxed{L77}$

$\frac{d^2}{dt^2}$(76.7) $\quad \ddot{x} = r\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad (1)$

Eingesetzt in (76.6): $\quad \lambda \overset{(76.6)}{=} \frac{1}{2}Mr\ddot{\theta} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}M\ddot{x} \quad (2)$

(2) in (76.5) liefert: $\quad M\ddot{x} \overset{(76.5)}{=} Mg\sin\phi - \overset{(2)}{\cancel{\lambda}}\ \frac{1}{2}M\ddot{x} \quad (3)$

$$\ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\phi \quad (4)$$

{rollt langsamer, als er ohne Reibung rutschen würde!}

Lösung v. (4): $\quad x(t) = \frac{1}{3}g\sin\phi\, t^2 + v_0 t + x_0 \quad (5)$

(4) in (2): $\quad \lambda \overset{(2,4)}{=} \frac{1}{3}Mg\sin\phi$ = Stärke d. Reibungskraft $\quad (6)$

(4) in (1): $\quad \ddot{\theta} \overset{(1)}{=} \frac{1}{r}\ddot{x} = \frac{2}{3}\frac{g}{r}\sin\phi \quad (7)$

Lösung v. (7): $\quad \theta(t) = \frac{1}{3}\frac{g}{r}\sin\phi\, t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \quad (8)$

(Nachträgliche) Bemerkungen zum Hamilton-Prinzip (HP)

$\delta S[q] = 0$

HP in Worten: "Die Wirkung ist auf der tatsächlich durchlaufenen Bahn stationär gegen kleine Änderungen der Bahn, die mit den Randbedingungen verträglich sind."

$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$

"principle of least action"

a) HP wird auch als "Prinzip der kleinsten Wirkung" bezeichnet. Tatsächlich ist Wirkung jedoch nur stationär (d.h. nicht unbedingt minimal)

b) HP ist analog zum Fermatschen Prinzip:
Licht sucht den extremalen Weg zwischen Quelle und Beobachtungsort.

c) HP liefert elegant, kompakte Formulierung der dynamischen Evolution in einer einzigen Gleichung. (Lagrange-Funktion ist of sehr einfach zu bestimmen.)
[Allgemein: Alle fundamentalen Theorien scheinen sich über Extremalprinzipien formulieren zu lassen!]

d) HP hilft jedoch nicht für praktischen Lösungen: Euler-Lagrange-Gl. muss sowieso gelöst werden. Aber dennoch sehr elegant für allgemeine, formale Aussagen. Z.B.:

i) Satz: HP impliziert Kovarianz der Lagrange-Gl. 2. Art unter Koord.-Transf.

Beweis: Wirkung S ist unabhängig von Parametrisierung für gegebene physikalische Bahnkurve; folglich haben Euler-Lagrange-Gl. die gleiche Form für jede Parametrisierung!

Parametrisierung 1:
(z.B.: $q = x, y, z$)

$$S[q] = \int dt\, L(q, \dot{q}, t) \qquad (1)$$

HP:

$$\delta S[q] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \qquad (2)$$

Parametrisierung 2:

$q = q(Q, t)$

(z.B. $Q = r, \theta, \varphi$)

$$S[q] = \int dt\, \underbrace{L(q(Q,t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t)}_{\text{[Definition von } \tilde{L}\text{]}} \qquad (3)$$

$$= \int dt\, \tilde{L}(Q, \dot{Q}, t) =: \tilde{S}[Q] \qquad (4)$$

HP:

$$\delta \tilde{S}[Q] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q} \qquad (5)$$

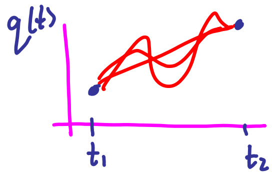
"Kovarianz der Bewegungsgleichung: (2) und (5) haben dieselbe Form!

(ii) Satz: Bewegungsgleichungen sind invariant unter "Eichtransformationen": $\boxed{L80}$

Beweis: Zeit

$\boxed{\text{totale Ableitung einer beliebigen Funktion von } q(t), t}$

Betrachte: $L' = L + \frac{d}{dt} M(q,t)$ (1)



$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q,t) \Rightarrow S'[q] = S[q] + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt\, \frac{d}{dt} M(q,t)}$ (2)

$M(q(t_2),t_2) - M(q(t_1),t_1)) \equiv M_2 - M_1$ (3)

[unabhängig v. $q(t)$!].

Unter Variation ($\to q + \delta q$) mit festen Randbedingungen, $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ (4)

gilt, laut (2): $\delta S'[q] \overset{(2)}{=} \delta S[q] + \overbrace{\delta(M_2 - M_1)}^{(4)\ = 0}$ (5)

$\delta S[q] \overset{(5)}{=} \delta S'[q]$

⇒ Bewegungsgleichungen sind invariant unter Eichtransformat.

⇒ L ist nicht eindeutig festgelegt: $L + \frac{d}{dt} M$ ist "genau so gut!"

Zwischenbemerkung: Nachtrag zu Vorlesung 10 (Herleitung d. Lagrange-Gleichungen) $\boxed{L48a}$

Verallgemeinerung für geschwindigkeitsabhängige Potenziale

$x = (x_1, \dots, x_N)$

Betrachte Kraft d. Form: $K_n \overset{(44.*)}{=} -\frac{\partial U}{\partial x_n} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot x_n}$, mit $U = U(x, \dot x, t)$ (1)

Def: Verallg. Kraft: $Q_k \overset{(44.3)}{\equiv} \bar K \cdot (\delta \bar x)_k \quad \forall\ k = 1, \dots, f$ (2)

$(*)$, (42.2)

$$= \sum_{n=1}^{\tilde N} (-) \frac{\partial U(x,\dot x,t)}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\tilde N} \frac{\partial U(x,\dot x,t)}{\partial \dot x_n} \frac{\partial x_n}{\partial q_k} \quad (3)$$

$\overset{(45.2)}{=} \frac{\partial \dot x_n}{\partial \dot q_k}$

$\dot{\vec p}_n = \vec K + \vec Z$

$\vec Z \cdot (\vec{\delta x})_k = 0$

Kettenregel

$$= -\frac{\partial U}{\partial q_k} \quad (4) \quad + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot q_k}$$

Virtuelle Verrückung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \overset{(46.5)}{=} \dot{\vec p} \cdot (\vec{\delta x})_k \overset{(44.2)}{=} \vec K \cdot (\vec{\delta x})_k \overset{(4)}{=} -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot q_k} \quad (5)$$

$\frac{\partial U}{\partial \dot q_k} = 0$

$L = T - U$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}}$$ (6) gilt auch für Kraft d. Form (1)!

Beispiel: Geladenes Teilchen in äußerem elektromagnetischen Feld $\boxed{L81}$

Frage: Welches L beschreibt Lorentz-Kraft? $\vec{F} = q\,(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})$ (1)

Antwort:
(Beweis folgt auf S. 82)
$$L = \tfrac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} - q\phi + q\,\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}} \qquad (2)$$

wobei das "Skalarpotenzial" $\phi(\vec{r},t)$ und "Vektorpotential" $\vec{A}(\vec{r},t)$ Hilfsgrößen zur kompakten Beschreibung des elektrischen Felds $\vec{E}(\vec{r},t)$ und Magnetfelds $\vec{B}(\vec{r},t)$ sind: (siehe E2, T3)

(siehe T3)
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} \quad (3) \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad (4)$$

Zwischenbemerkung:

Die "elektromagnetischen Potenziale" ϕ, $\vec{A}$ sind keine meßbaren Größen, aber sehr nützlich für kompakte Darstellung vieler Ergebnisse. Z.B. Vereinfachen sich 2 der Maxwell-Gl:

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (5) wird identisch erfüllt

$$\vec{\nabla}\cdot\overbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{A})}^{(4)} = 0 \qquad (6) \quad \text{(Vektoridentität)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (7)$$

$$\underbrace{\vec{\nabla}\times(-\vec{\nabla}\phi}_{=0} - \partial_t\vec{A}) = -\partial_t(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (8)$$

$\boxed{L82}$

Lorentz-Kraft:
$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \dot{\vec{r}}\times\vec{B}) \qquad (1)$$

$$= q\,\big(\overbrace{-\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A}}^{(81.3)} + \dot{\vec{r}}\times\overbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{A})}^{(81.4)}\big) \qquad (2)$$

① ②

$$\dot{\vec{r}}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \overset{\text{bac - cab}}{=} ③\ \vec{\nabla}(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}) - (\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\ ④ \qquad (3)$$

Zwischenrechnung:
$$\frac{d\vec{A}(\vec{r}(t),t)}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\vec{A}}{\partial r_i}\frac{dr_i}{dt} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} \qquad (4)$$

$$\vec{F} \overset{(2,3)}{=} q\Big[-\overset{①}{\vec{\nabla}}(\phi - \overset{③}{\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}}) - \overset{②④}{\frac{d}{dt}}\vec{A}\Big] \qquad (5)$$

$$\vec{A} = \frac{\partial(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A})}{\partial\dot{\vec{r}}} \qquad (6)$$

mit
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F} &= -\vec{\nabla}U + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\dot{\vec{r}}} \\ U &= q\phi - q\,\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A} \end{aligned}}$$

, hat Form von (48a.1)! (7)
also gelten LG2, (48a.6)

$\phi = \phi(\vec{r},t)$, $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r},t)$ (8)

Lagrange-Funktion für geladenes Teilchen im Elektromagnetischen Feld:

$$\boxed{L = T - U \overset{(82.8)}{=} \tfrac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - q\phi + q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}} \qquad (1)$$

Check Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}}\right) \overset{(48a.6)}{=} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} : \qquad \frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}\right) = -q\frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}} + q\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}) \qquad (2)$$

$$m\ddot{\vec{r}} + q\left(\partial_t\vec{A} + (\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right) \overset{(82.4)}{=} \qquad \text{"} \qquad \text{"} \qquad (3)$$

$$m\ddot{\vec{r}} = -q\underbrace{\left(\vec{\nabla}\phi + \partial_t\vec{A}\right)}_{-\vec{E}\ (81.3)} + q\underbrace{\left(\vec{\nabla}(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}) - (\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right)}_{(82.3)\ \dot{\vec{r}}\times(\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{A}}_{\vec{B}\ (81.4)})} \qquad (4)$$

$$= q\left(\vec{E} + \dot{\vec{r}}\times\vec{B}\right) \checkmark \qquad (5)$$

Eichinvariant der $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder

Satz: $\chi(\vec{r},t)$ sei beliebige Skalar Funktion: Unter der "Eichtransformation"

$$\vec{A} \to \vec{A}^* = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \qquad (1)$$

$$\phi \to \phi^* = \phi - \partial_t\chi \qquad (2)$$

sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$-Felder invariant (= unverändert):

Beweis:
$$\vec{E} \to \vec{E}^* = -\vec{\nabla}\phi^* - \partial_t A^*$$
$$\overset{(1,2)}{=} -\vec{\nabla}(\phi - \cancel{\partial_t\chi}) - \partial_t(\vec{A} + \cancel{\vec{\nabla}\chi}) = \vec{E} \qquad (3)$$

$$\vec{B} \to \vec{B}^* = \vec{\nabla}\times\vec{A}^* = \vec{\nabla}\times(\vec{A} + \underbrace{\cancel{\vec{\nabla}\chi}}_{=0}) = \vec{B} \qquad (4)$$

$\square$.

Fazit: ϕ und $\vec{A}$ sind nicht eindeutig definiert: "Eichfreiheit"!
Die Freiheit, χ nach Bedarf zu wählen, kann zur Vereinfachung von konkreten Rechnungen genutzt werden.

Eichtransformation für L:

L85

$$L \to L^* = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - (q\phi^* - q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}^*) \quad (1)$$

(84.1,2)

$$= \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - [q(\phi - \partial_t \chi) - q\dot{\vec{r}}\cdot(\vec{A} + \vec{\nabla}\chi)] \quad (2)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{\nabla}\chi$$

$$= L + q\left[\partial_t \chi + \frac{\partial \chi}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right] \quad (3)$$

$$L \to L^* = L + q \frac{d}{dt} \chi(\vec{r}(t), t) \quad (4)$$

Fazit: unter Eichtransformation (84.1,2) ändert sich L nur um totale Zeitableitung.

Folglich sind, laut (80.1), Lagrange-Gleichungen invariant (unverändert) unter (84.1,2).

In der Tat: LG2 $\Rightarrow$ $m\ddot{\vec{r}} \overset{(83.5)}{=} q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})$ ist invariant, denn $\vec{E}, \vec{B}$ sind invariant (siehe 84.3,4).

Bemerkung*:** Forderung der Lokalität, Homogenität und Isotropie der Raumzeit, sowie der Eichinvarianz, genügt, um die Form von L eindeutig zu bestimmen! (0)

L85a

(d.h. um Form der Lorentz-Kraft zu bestimmen!)

1. Forderung: Kopplung des Teilchens an $\vec{A}$, ϕ soll lokal sein in Raum und Zeit (Ableitungen ∂_t, $\vec{\nabla}$ von $\vec{A}$ oder ϕ sollen nicht vorkommen):

$$\Rightarrow \quad L = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \vec{A}(\vec{r},t), \phi(\vec{r},t)) \quad (1)$$

2. Forderung: Homogenität und Isotropie der Raumzeit (keine explizite Abhängigkeit von $\vec{r}$, t, Winkeln ...)

$$L = L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}, \phi) \quad \left[\begin{array}{l}\text{aber nicht:} \\ \vec{r}\cdot\vec{A}, \; t\phi\end{array}\right] \quad (2)$$

3. Forderung: Bewegungsgl. des Teilchens soll eichinvariant sein:

$$L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}}\cdot(\vec{A} + \vec{\nabla}\chi), \phi - \partial_t \chi) = L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}, \phi) + \frac{d}{dt}\Lambda \quad (3)$$

Zusatzterm erlaubt wegen (80.1)

Bestimmung von L mittels Forderungen 1 – 3

Allgemeinst-denkbare Form von Λ wäre:

$$\Lambda = \Lambda(\chi, \cancel{\nabla\chi}, \cancel{\partial_t \chi}, \cancel{\vec{A}}, \cancel{\phi}) = \Lambda(\chi) \qquad (1)$$

kommen alle links in (85a.3) vor!

Aber: nur $\Lambda = \Lambda(\chi)$ funktioniert: sonst erzeugt $\frac{d}{dt}\Lambda$ Terme wie $\partial_t \nabla \chi$, $\partial_t^2 \chi$, $\partial_t \vec{A}$, $\partial_t \phi$ usw., die links in (83.3) nicht vorkommen!

Sei nun χ infinitesimal, und entwickle (85a.3) in Potenzen von χ:

(85a.3) $$L(\dot{\vec r}^2, \dot{\vec r}\cdot(\vec A + \vec\nabla\chi), \phi - \partial_t \chi) = L(\dot{\vec r}^2, \dot{\vec r}\cdot\vec A, \phi) + \frac{d}{dt}\Lambda \qquad (2)$$

Ordnung χ^0: $$L(\dot{\vec r}^2, \dot{\vec r}\cdot\vec A, \phi) = L(\dot{\vec r}^2, \dot{\vec r}\cdot\vec A, \phi) \checkmark \qquad \Lambda = \Lambda(\vec r(t), t) \qquad (3)$$

Ordnung χ^1: $$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial(\dot{\vec r}\cdot\vec A)}\Big|_{\chi=0}}_{\lambda} (\dot{\vec r}\cdot\vec\nabla\chi) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial\phi}}_{\lambda} \partial_t \chi = \underbrace{\frac{\partial\Lambda}{\partial\chi}\Big|_{\chi=0}}_{\lambda} (\vec\nabla\chi\cdot\dot{\vec r} + \partial_t\chi) \qquad (4)$$

Koeffizientenvergleich: $$\frac{\partial L}{\partial(\dot{\vec r}\cdot\vec A)} = \lambda \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial\phi} = -\lambda \qquad (5)$$

Hieraus folgt: $$L \overset{(85b.5)}{=} \lambda(\dot{\vec r}\cdot\vec A) + (-\lambda)\phi + f(\dot{\vec r}^2) \qquad (1)$$

Aber, für freies Teilchen gilt: $$L(\vec A = 0, \phi = 0) = \tfrac{1}{2} m \dot{\vec r}, \quad \Rightarrow f(\dot{\vec r}^2) = \tfrac{1}{2} m \dot{\vec r}^2 \qquad (2)$$

Die Form von L ist nun komplett bestimmt!

Mit Identifikation $$\lambda = q = \text{Ladung} \qquad (3)$$

ist das Endergebnis: $$\boxed{L = \tfrac{1}{2} m \dot{\vec r}^2 - q(\phi - \dot{\vec r}\cdot\vec A)} \qquad (4)$$

Bemerkung: Konstruktion von "neuen" Lagrange-Funktionen anhand von Symmetrieforderungen ist sehr fruchtbare Vorgehensweise in der theor. Physik!