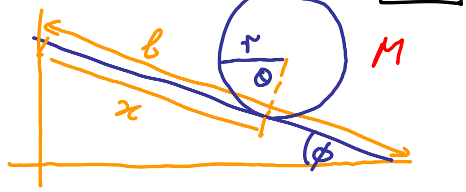
Beispiel: Rollender Reifen mit $r = r(t)$

V16 – 5.6.08 $\boxed{L76}$



Kinetische Energie $\quad T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{2} M r^2\right)}_{I} \dot{\theta}^2 \quad (1)$

Potenzielle Energie: $\quad V = Mg(\ell - x)\sin\phi \quad (2)$

Zwangsbedingung: $\quad g(x,\theta) = \theta r - x = 0 \quad (3)$

konstant

[nicht-gleitendes Rollen, holonome ZB]

Erweiterte Lagrange-Fkt: $L^* \overset{(75.1)}{=} L + \lambda g$

$$L^* \overset{(75.1)}{=} T - V + \lambda(\theta r - x) \quad (4)$$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L^*}{\partial x}$: $\quad M\ddot{x} = Mg\sin\phi - \lambda \quad (5)$

Interpretation: Reibungskraft

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L^*}{\partial \theta}$: $\quad \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}\right)}_{\frac{1}{2} M r^{\cancel{2}} \ddot{\theta}} = \lambda \cancel{r} \quad (6)$

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{\partial L^*}{\partial \lambda}$: $\quad 0 = \theta r - x \quad (7)$

(5) – (7) sind zu lösen. Eliminiere zunächst $\ddot{\theta}$ zwischen (76.6) und (76.7): $\boxed{L77}$

$\frac{d^2}{dt^2}$ (76.7) $\quad \ddot{x} = r\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad (1)$

Eingesetzt in (76.6): $\quad \lambda \overset{(76.6)}{=} \frac{1}{2} M r \ddot{\theta} \overset{(1)}{=} \frac{1}{2} M \ddot{x} \quad (2)$

(2) in (76.5) liefert: $\quad \cancel{M}\ddot{x} \overset{(76.5)}{=} \cancel{M} g \sin\phi - \cancel{\lambda}\, \frac{1}{2}\cancel{M}\ddot{x} \quad (3)$

$$\ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin\phi \quad (4)$$

{rollt langsamer, als er ohne Reibung rutschen würde!

Lösung v. (4): $\quad x(t) = \frac{1}{3} g \sin\phi\, t^2 + v_0 t + x_0 \quad (5)$

(4) in (2): $\quad \lambda \overset{(2,4)}{=} \frac{1}{3} Mg \sin\phi$ = Stärke d. Reibungskraft $\quad (6)$

(4) in (1): $\quad \ddot{\theta} = \frac{1}{r}\ddot{x} = \frac{2}{3}\frac{g}{r}\sin\phi \quad (7)$

Lösung v. (7): $\quad \theta(t) = \frac{1}{3}\frac{g}{r}\sin\phi\, t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \quad (8)$

(Nachträgliche) Bemerkungen zum Hamilton-Prinzip (HP)

$\delta S[q] = 0$

HP in Worten: "Die Wirkung ist auf der tatsächlich durchlaufenen Bahn stationär gegen kleine Änderungen der Bahn, die mit den Randbedingungen verträglich sind."

$\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$

a) HP wird auch als "Prinzip der kleinsten Wirkung" bezeichnet. Tatsächlich ist Wirkung jedoch nur stationär (d.h. nicht unbedingt minimal)

b) HP ist analog zum Fermatschen Prinzip:
Licht sucht den extremalen Weg zwischen Quelle und Beobachtungsort.

c) HP liefert elegant, kompakte Formulierung der dynamischen Evolution in einer einzigen Gleichung. (Lagrange-Funktion ist of sehr einfach zu bestimmen.)
[Allgemein: Alle fundamentalen Theorien scheinen sich über Extremalprinzipien formulieren zu lassen!]

d) HP hilft jedoch nicht für praktischen Lösungen: Euler-Lagrange-Gl. muss sowieso gelöst werden. Aber dennoch sehr elegant für allgemeine, formale Aussagen. Z.B.:

i) Satz: HP impliziert Kovarianz der Lagrange-Gl. 2. Art unter Koord.-Transf.

Beweis: Wirkung S ist unabhängig von Parametrisierung für gegebene physikalische Bahnkurve; folglich haben Euler-Lagrange-Gl. die gleiche Form für jede Parametrisierung!

Parametrisierung 1: (z.B.: $q = x, y, z$)

$$S[q] = \int dt\, L(q, \dot q, t) \qquad (1)$$

HP:

$$\delta S[q] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = \frac{\partial L}{\partial q} \qquad (2)$$

Parametrisierung 2: $q = q(Q,t)$ (z.B. $Q = r, \theta, \varphi$)

$$S[q] = \int dt\, \underbrace{L(q(Q,t), \dot q(Q,\dot Q,t), t)}_{\text{[Definition von } \tilde L\text{]}} \qquad (3)$$

$$= \int dt\, \tilde L(Q, \dot Q, t) =: \tilde S[Q] \qquad (4)$$

HP:

$$\delta \tilde S[Q] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde L}{\partial \dot Q} = \frac{\partial \tilde L}{\partial Q} \qquad (5)$$

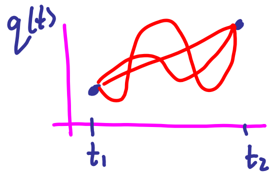
"Kovarianz der Bewegungsgleichung: (2) und (5) haben dieselbe Form!

(ii) Satz: Bewegungsgleichungen sind invariant unter "Eichtransformationen": (ET): **L80**

Beweis: $\boxed{\text{totale Ableitung einer beliebigen Funktion von } q(t), t}$

Betrachte: $$L' = L + \frac{d}{dt} M(q,t) \qquad (1)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q,t) \Rightarrow S'[q] = S[q] + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} M(q,t)}_{M(q(t_1),t_1) - M(q(t_2),t_2) \equiv M_1 - M_2} \qquad (2)$$



$M(q(t_1),t_1) - M(q(t_2),t_2) \equiv M_1 - M_2$ [unabhängig v. $q(t)$!]. (3)

$q \to q + \delta q$

Unter Variation mit festen Randbedingungen, $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, (4)

gilt, laut (2): $$\delta S'[q] \overset{(2)}{=} \delta S[q] + \overbrace{\delta(M_1 - M_2)}^{(4)\ =0} \qquad (5)$$

$\delta S[q] \overset{(5)}{=} \delta S[q']$ ⇒ Bewegungsgleichungen sind invariant unter Eichtransformat.

⇒ L ist nicht eindeutig festgelegt: $L + \frac{d}{dt} M$ ist "genau so gut!"

Zwischenbemerkung: Nachtrag zu Vorlesung 10 (Herleitung d. Lagrange-Gleichungen) **L48a**

Verallgemeinerung für geschwindigkeitsabhängige Potenziale

Betrachte Kraft d. Form: $$K_n \overset{(44.*)}{=} -\frac{\partial U}{\partial x_n} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{x}_n}, \quad \text{mit } U = U(x, \quad t) \qquad (1)$$

Def: Verallg. Kraft: $$Q_K \overset{(44.3)}{\equiv} \bar{K} \cdot (\delta \bar{x})_K \qquad \forall\, K = 1, \dots, f \qquad (2)$$

$$= \sum_{n=1}^{\tilde{N}} (-) \overset{(*)}{\frac{\partial U(x,\dot{x},t)}{\partial x_n}} \frac{\partial x_n}{\partial q_K} + \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\tilde{N}} \frac{\partial U(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}_n} \overset{(42.2)}{\frac{\partial x_n}{\partial q_K}}}_{\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_K}} \qquad (3)$$

(45.2): $= \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial \dot{q}_K}$

$$= -\frac{\partial U}{\partial q_K} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_K}\right) \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_K} - \frac{\partial T}{\partial q_K} \overset{(46.5)}{=} \dot{\vec{p}} \cdot (\vec{\delta x})_K \overset{(44.2)}{=} \vec{K} \cdot (\vec{\delta x})_K \overset{(4)}{=} -\frac{\partial U}{\partial q_K} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_K} \qquad (5)$$

$$L = T - U \qquad \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}} \qquad (6)$$

gilt auch für Kraft d. Form (1)!

Beispiel: Geladenes Teilchen in äußerem elektromagnetischen Feld

L81

Frage: Welches L beschreibt Lorentz-Kraft? $\quad \vec F = q(\vec E + \vec v \times \vec B)$ (1)

Antwort: $\quad L = \frac{1}{2} m \dot{\vec r}^2 - q\phi + q \vec A \cdot \dot{\vec r}$ (2)

(Beweis folgt auf S.)

wobei das "Skalarpotenzial" $\phi(\vec r, t)$ und "Vektorpotential" $\vec A(\vec r, t)$ Hilfsgrößen zur kompakten Beschreibung des elektrischen Felds $\vec E(\vec r, t)$ und Magnetfelds $\vec B(\vec r, t)$ sind: (siehe E2, T3)

$$\vec E = -\vec\nabla\phi - \partial_t \vec A \quad (3) \qquad\qquad \vec B = \vec\nabla \times \vec A \quad (4)$$

Zwischenbemerkung:

Die "elektromagnetischen Potenziale" $\phi, \vec A$ sind keine meßbaren Größen, aber sehr nützlich für kompakte Darstellung vieler Ergebnisse. Z.B. Vereinfachen sich 2 der Maxwell-Gl.:

$\vec\nabla \cdot \vec B = 0$ (5) wird identisch erfüllt

$\vec\nabla \cdot (\overbrace{\vec\nabla \times \vec A}^{(4)}) = 0$ ✓ (6) (Vektoridentität)

$\vec\nabla \times \vec E = -\dfrac{\partial \vec B}{\partial t}$ (7)

$\underbrace{\vec\nabla \times (-\vec\nabla\phi}_{=0} - \partial_t \vec A) = -\partial_t \vec B$ ✓ (8)

L82

Lorenz-Kraft: $\quad \vec F = q(\vec E + \dot{\vec r} \times \vec B)$ (1)

$$= q\left(-\vec\nabla\phi - \partial_t \vec A + \underbrace{\dot{\vec r} \times (\vec\nabla \times \vec A)}_{\text{bac - cab}}\right) \quad (2)$$

$$\vec\nabla(\dot{\vec r} \cdot \vec A) - (\dot{\vec r} \cdot \vec\nabla)\vec A \quad (3)$$

Zwischenrechnung: $\quad \dfrac{d\vec A(\vec r, t)}{dt} = \dfrac{\partial \vec A}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial \vec A}{\partial r_i} \dfrac{d r_i}{dt} = \partial_t \vec A + (\dot{\vec r} \cdot \vec\nabla)\vec A$ (4)

$$\vec F \overset{(2,3)}{=} q\left[-\vec\nabla(\phi - \dot{\vec r} \cdot \vec A) - \underbrace{\frac{d}{dt}}_{} \vec A\right] \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(\dot{\vec r} \cdot \vec A)}{\partial \dot{\vec r}} \quad (6)$$

$$\boxed{\vec F = -\vec\nabla U + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec r}}} \quad (7)$$

mit

$$\boxed{U = q\phi - q\dot{\vec r} \cdot \vec A} \quad (8)$$

, hat Form von (48a.1)! also gelten LG2, (48a.6)

Lagrange-Funktion für geladenes Teilchen im Elektromagnetischen Feld: L83

$$\boxed{L = T - U = \tfrac{1}{2} m \dot{\vec r}^{\,2} - q\phi + q\,\dot{\vec r}\cdot\vec A} \qquad (1)$$

Check Bewegungsgleichung:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec r}}\right) \overset{(48a.6)}{=} \frac{\partial L}{\partial \vec r}: \qquad \frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec r} + q\vec A\right) = -q\frac{\partial \phi}{\partial \vec r} + q\frac{\partial}{\partial \vec r}\left(\dot{\vec r}\cdot\vec A\right) \qquad (2)$$

(82.4)

$$m\ddot{\vec r} + q\left(\partial_t \vec A + (\dot{\vec r}\cdot\vec\nabla)\vec A\right) = \quad " \qquad " \qquad (3)$$

$$m\ddot{\vec r} = -q\Big(\underbrace{\vec\nabla\phi + \partial_t\vec A}_{-\vec E \ (81.3)}\Big) + q\Big(\underbrace{\vec\nabla(\dot{\vec r}\cdot\vec A) - (\dot{\vec r}\cdot\vec\nabla)\vec A}_{(82.3)\ \dot{\vec r}\times(\underbrace{\vec\nabla\times\vec A}_{\vec B\ (81.6)})}\Big) \qquad (4)$$

$$= q\left(\vec E + \dot{\vec r}\times\vec B\right) \quad ✓ \qquad (5)$$

Eichinvarianz der $\vec E$- und $\vec B$-Felder L84

Satz: $\chi(\vec r, t)$ sei beliebige Skalar Funktion: Unter der "Eichtransformation"

$$\vec A \to \vec A^* = \vec A + \vec\nabla\chi \qquad (1)$$

$$\phi \to \phi^* = \phi - \partial_t\chi \qquad (2)$$

sind $\vec E$ und $\vec B$-Felder invariant (= unverändert):

Beweis:

$$\vec E \to \vec E^* = -\vec\nabla\phi^* - \partial_t A^*$$

$$= -\vec\nabla(\phi - \cancel{\partial_t\chi}) - \partial_t(A + \cancel{\vec\nabla\chi}) = \vec E \qquad (3)$$

$$\vec B \to \vec B^* = \vec\nabla\times\vec A^* = \underbrace{\vec\nabla\times(\vec A + \cancel{\vec\nabla\chi})}_{\cancel{\vec\nabla\times\vec\nabla\chi}=0} = \vec B \qquad (4)$$

$\square$.

Fazit: ϕ und $\vec A$ sind nicht eindeutig definiert: "Eichfreiheit"!
Die Freiheit, χ nach Bedarf zu wählen, kann zur Vereinfachung von konkreten Rechnungen genutzt werden.

Eichtransformation für L:

L85

$$L \to L^* = \tfrac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - \left(q\phi^* - q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}^*\right) \tag{1}$$

$$= \tfrac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - \left[q(\phi - \partial_t \chi) - q\dot{\vec{r}}\cdot(\vec{A} + \vec{\nabla}\chi)\right] \tag{2}$$

$$= L + q\left[\partial_t \chi + \frac{\partial \chi}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right] \tag{3}$$

$$L \to L^* = L + q \frac{d}{dt}\chi(\vec{r},t) \tag{4}$$

Fazit: unter Eichtransformation (84.1,2) ändert sich L nur um totale Zeitableitung.

Folglich sind, laut (80.1), Lagrange-Gleichungen invariant (unverändert) unter (84.1,2).

In der Tat: LG2 $\Rightarrow$ $m\ddot{\vec{r}} \overset{(83.5)}{=} q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})$ ist invariant, denn $\vec{E}, \vec{B}$ sind invariant (siehe 84.3,4).

Bemerkung: Forderung der Lokalität, Homogenität und Isotropie der Raumzeit, sowie der Eichinvarianz, genügt, um die Form von L eindeutig zu bestimmen! (0)

L85a

(d.h. um Form der Lorentz-Kraft zu bestimmen!)

1. Forderung: Kopplung des Teilchens an $\vec{A}$, ϕ soll lokal sein in Raum und Zeit (Ableitungen ∂_t, $\vec{\nabla}$ von $\vec{A}$ oder ϕ sollen nicht vorkommen):

$$\Rightarrow \quad L = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \vec{A}(\vec{r},t), \phi(\vec{r},t)) \tag{1}$$

2. Forderung: Homogenität und Isotropie der Raumzeit (keine explizite Abhängigkeit von $\vec{r}$, t, Winkeln ...)

$$L = L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}, \phi) \quad \left[\begin{array}{l}\text{aber nicht:}\\ \vec{r}\cdot\vec{A},\ \ t\phi,\ \text{usw.}\end{array}\right] \tag{2}$$

3. Forderung: Bewegungsgl. des Teilchens soll eichinvariant sein:

$$L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}}\cdot(\vec{A} + \vec{\nabla}\chi), \phi - \partial_t\phi) = L(\dot{\vec{r}}^2, \dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}, \phi) + \frac{d}{dt}\Lambda \tag{3}$$

Zusatzterm erlaubt wegen (80.1)

Bestimmung von L mittels Forderungen 1 – 3

Allgemeinst-denkbare Form von Λ wäre: $\Lambda = \Lambda(\chi, \vec\nabla\chi, \partial_t\chi, \vec A, \phi)$ (1)

kommen alle links in (85a.3) vor!

Aber: nur $\Lambda = \Lambda(\chi)$ funktioniert: sonst erzeugt $\frac{d}{dt}\Lambda$ Terme wie $\partial_t\vec\nabla\chi$, $\partial_t^2\chi$, $\partial_t\vec A$, $\partial_t\phi$, usw., die links in (83.3) nicht vorkommen!

Sei nun χ infinitesimal, und entwickle (85a.3) in Potenzen von χ:

(85a.3) $$L(\dot{\vec r}^2, \dot{\vec r}\cdot(\vec A + \vec\nabla\chi), \phi - \partial_t\chi) = L(\dot{\vec r}^2, \dot{\vec r}\cdot\vec A, \phi) + \frac{d}{dt}\Lambda \quad (2)$$

Ordnung χ^0: $$L(\dot{\vec r}^2, \dot{\vec r}\cdot\vec A, \phi) = L(\dot{\vec r}^2, \dot{\vec r}\cdot\vec A, \phi) \quad (3)$$

$\Lambda = \Lambda(\chi(\vec r, t))$

Ordnung χ^1: $$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial(\dot{\vec r}\cdot\vec A)}}_{\lambda}(\dot{\vec r}\cdot\vec\nabla\chi) - \underbrace{\boxed{\frac{\partial L}{\partial\phi}}}_{\lambda}\partial_t\chi = \underbrace{\boxed{\frac{\partial\Lambda}{\partial\chi}}\Big|_{\chi=0}}_{\lambda}(\vec\nabla\chi\cdot\dot{\vec r} + \partial_t\chi) \quad (4)$$

Koeffizientenvergleich: $$\frac{\partial L}{\partial(\dot{\vec r}\cdot\vec A)} = \lambda \; ; \; \frac{\partial L}{\partial\phi} = -\lambda \quad (5)$$

Hieraus folgt: $$L \overset{(85b.5)}{=} \lambda(\dot{\vec r}\cdot\vec A) + (-\lambda)\phi + f(\dot{\vec r}^2) \quad (1)$$

Aber, für freies Teilchen gilt: $$L(\vec A = 0, \phi = 0) = \frac{1}{2}m\dot{\vec r}^2, \quad \Rightarrow f(\dot{\vec r}^2) = \frac{1}{2}m\dot{\vec r}^2 \quad (2)$$

Die Form von L ist nun komplett bestimmt!

Mit Identifikation $\lambda = q =$ Ladung des Teilchens (3)

ist das Endergebnis: $$\boxed{L \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}m\dot{\vec r}^2 - q[\phi - \dot{\vec r}\cdot\vec A]} \quad (4)$$

Bemerkung: Konstruktion von "neuen" Lagrange-Funktionen anhand von Symmetrieforderungen ist sehr fruchtbare Vorgehensweise in der theor. Physik!